Derivadas parciais – atividades adicionais

Professor Fiore

Para uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ as derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Há outras notações para derivadas parciais.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)] = f_1 = D_1 f = D_x f \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y = f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)] = f_2 = D_2 f = D_y f$$

De uma forma geral ao derivar uma função de várias variáveis em relação a variável x você considera as outras variáveis independentes como constantes. O mesmo se dá com as demais variáveis.

Derivadas de segunda ordem, são derivadas de derivadas e as encontramos de acordo com a ordem solicitada. Por exemplo, f_{xy} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, indica que a primeira derivada é em relação a variável x e a segunda em relação a y.

1. Encontre a derivada parcial de primeira ordem em relação a x para cada função abaixo.

a. $f(x,y) = x^3 - 4y^2$
b. $z = -x^3 y + 3y^{-3}$
c. $z = \frac{3}{x^2} - 3xy$
d. $f(x,y) = e^{x+y}$
e. $f(x,y) = e^{xy^2}$
f. $f(x,y) = -e^{y.cos(x)}$
g. $f(x,y) = ln(3x + y^2)$
h. $z = ln(xy + 2y^2)$
i. $f(x,y) = ln(x + e^y)$
j. $z = ln(cos\, x + sin\, y)$
k. $f(x,y) = cos(xy^2)$
l. $z = cos(-xy + 3y^2)$
m. $z = cos(x + e^y)$
n. $f(x,y) = sin(x + y^3)$
o. $z = sin(xy + 2y)$
p. $z = sin(e^{xy} + y)$
q. $z = \sqrt{\sin y + \cos x}$
r. $f(x,y) = \sqrt{x + y^2}$
s. $z = \sqrt{xy^2}$
t. $f(x,y) = 3^{xy}$
u. $f(x,y) = 10^{x^2 y - 3y}$
v. $z = tan(x^2 - y^3)$
w. $f(x,y) = (2x - 3y^2)^7$

2. Encontre as derivadas parciais em relação a y, das funções do exercício anterior.

3. Encontre as derivadas parciais de primeira ordem das funções abaixo.

a. $f(x,y) = xe^{3x+y^2}$
b. $z = xye^{xy}$
c. $f(x,y) = -3x\cos(xy)$
d. $z = \cos(tu)\sin(tu)$
e. $f(x,y) = e^{xy}\sin(x^2)$
f. $z = -u^3 v\cos(uv)$
g. $f(x,y) = e^x.\ln(yx)$
h. $z = (x + y^2)\ln(x^2 y)$
i. $f(x,y) = \frac{\cos xy}{\sin xy}$
j. $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y}}{xy}$
k. $f(x,y) = \frac{e^{x+3y}}{\cos x^2}$
l. $z = \frac{\sin xy}{\ln(x^2 + y^2)}$

4. Encontre as derivadas parciais de primeira ordem para as funções

a. $f(x,y) = x^y$
b. $f(x,y,z) = \frac{yx}{x+y+z}$
c. $f(x,y,z) = (x+y+z)^{10}$

5. Confira cada um dos resultados inserindo a função no site http://www.wolframalpha.com, aproveite para analisar os gráficos e as curvas de nível de cada. Atenção para inserir corretamente cada função.

6. Determine as derivadas parciais nos pontos indicados abaixo:

a. $f_z(1,1,2)$, para $f(x,y,z) = x^2 yz + \sqrt{x+y+z}$;
b. $f_x(2,8)$, para $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{xy})$
c. $f_y(1,-2,0)$, para $f(x,y,z) = \frac{y}{x+y+z}$
d. $f_u(\pi, \frac{1}{2})$, para $f(t,u) = t^2\cos(t,u)$

7. Encontre as derivadas solicitadas.

a. Para $f(x,y) = xy^3 - 4xe^{xy}$, encontre f_{xy} e f_{yx}

b. Para $f(x,y) = e^{xy^2}$, encontre f_{yxx} e f_{xxy}

c. Para $f(x,y) = \sqrt{xy^2}$, encontre f_{xy} e f_{yx}

d. Para $f(x,y) = \sin(x + y^3)$, encontre f_{xy} e f_{yx}

8. (Pesquise em livro) Com base na atividade anterior, o que diz o teorema de Clairaut?

9. (Pesquise em livro) Qual a interpretação das derivadas parciais, o que cada uma dela significa. Faça um desenho de um gráfico que ajude a explicar o solicitado.

10. Supondo que a função $T(x,y,t)$ nos dê a temperatura T de um local do globo, de acordo com sua longitude x, latitude y e do tempo t medido em horas. Qual o significado das derivadas parciais?

11. Uma chapa fina está exposta a uma fonte de calor e a temperatura medida (T em ºC) para cada ponto (x,y) da chapa, pode ser estimada pela função $T(x,y) = \dfrac{30}{1 + x - y^2}$.

    a. Determine a temperatura no ponto $(3,1)$.

    b. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(3,1)$ em relação a x.

    c. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(3,1)$ em relação a y.

    d. Explique o significado de cada taxa de variação calculada.

12. (Use calculadora) A função de Cobb-Douglas modela bem a ***produção*** total anual (P) em função da quantidade de ***trabalho*** (x) e da quantidade de ***capital investido*** (y). A produção total representa o valor monetário dos bens produzidos durante o ano. A quantidade de trabalho representa o número total de pessoas/horas trabalhadas no ano e a quantidade de capital investido representa o total de investimento com equipamentos e estrutura. Os valores de α e de β são ajustados para cada caso econômico usando estatística.

$$P(x,y) = \beta x^{\alpha} y^{\alpha - 1}$$

Abaixo temos a função Cobb-Douglas ajustada a situação econômica para o país ABC.

$$P(x,y) = 3x^{0,7} y^{0,3}$$

    a. Considere que para este ano, o país ABC terá x = 100 e y = 200, qual o valor da produção total deste ano?

    b. Se aumentarmos uma unidade em x, qual será o ***aumento*** em P? Compare com $P_x(100,200)$.

    c. Se aumentarmos uma unidade em y, qual será o ***aumento*** em P? Compare com $P_y(100,200)$.

    d. Para encontrar o efeito do aumento de uma unidade, seja na quantidade de trabalho ou na quantidade de capital investido, podemos usar as derivadas parciais?

    e. O que causa um maior aumento na produção, um leve aumento no trabalho ou no investimento?

    f. Pesquise o significado de produtividade marginal no trabalho e produtividade marginal do capital investido e associe com as derivadas parciais.