Função quadrática ou função polinomial de segundo grau

Professor Fiore

Uma função formada por um polinômio de segundo grau é chamada de função quadrática e tem o formato $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$. Os valores a, b e c, são coeficientes enquanto x e y, são respectivamente a variável independente e variável dependente. O gráfico será definido por uma parábola, com a concavidade para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$). Note que se $a = 0$, a função não será de segundo grau. O domínio será os números reais, ou seja, qualquer valor colocado no lugar do x terá uma imagem, entretanto a imagem depende da posição do vértice e da concavidade da parábola, pois nem todo número real pode ser encontrado no lugar de y.

Para esboçar um bom gráfico de uma parábola é aconselhado montar uma tabela simples com os pontos a serem esboçados. Os passos seguintes indicam excelentes pontos para o esboço do gráfico.

1. O primeiro ponto a ser encontrado é o que corta o eixo das ordenadas (eixo vertical, y), quando $x = 0$. Esse ponto sempre existirá e será dado pelas coordenadas (0, c).

2. Em seguida verificamos se a função corta, ou não, o eixo das abscissas (eixo horizontal, x), quando $y = 0$. Os pontos que cortam o eixo das abscissas são chamados de raízes e em uma função quadrática podemos ter: duas raízes reais distintas, uma raiz (dupla) ou nenhuma raiz real. Um bom método para encontrar as raízes de um polinômio quadrático é através da fórmula de Bháskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad\qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

   O valor de Δ (delta) indica o número de raízes. Se tivermos $\Delta > 0$ temos duas raízes reais, distintas. Caso $\Delta = 0$, temos uma raiz real, pois não fará diferença calcular mais ou menos a raiz de Δ. Por fim se $\Delta < 0$, não temos raiz real, pois não há raiz real de número negativo. Note que neste segundo passo podemos ter dois, um ou nenhum ponto, dependendo do valor do valor Δ.

3. Depois de encontrar as possíveis raízes buscamos o vértice, ponto mais alto ($a < 0$) ou mais baixo ($a > 0$) de uma parábola. As fórmulas abaixo nos permite encontrar as coordenadas do vértice.

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad\qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

   Eventualmente podemos encontrar o vértice a partir das raízes, quando $\Delta > 0$. Como a parábola é simétrica, em relação ao eixo vertical que passa pelo vértice, o valor da média entre as duas raízes dará o x_v e colocando esse valor na função encontramos o $y_v = f(x_v)$.

   Quando $\Delta = 0$, o vértice será o ponto encontrado na busca pelas raízes.

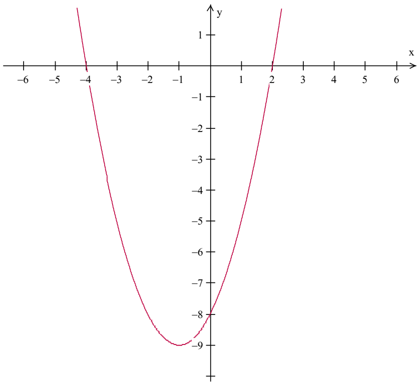
4. Por fim, se depois de seguir os passos anteriores não tivermos pontos suficientes para desenhar um bom gráfico, basta pegar pontos que ladeiam o vértice, pegue números fáceis de serem calculados, à direita e à esquerda do vértice, e encontre as imagens dele usando a função.

As aplicações envolvem o uso de funções quadráticas para representar problemas envolvendo áreas, movimentos uniformemente variados, como a queda de uma bola, a relação entre quantidade vendida e lucro, quando levamos em consideração a demanda de mercado, etc.

Exemplo de gráficos

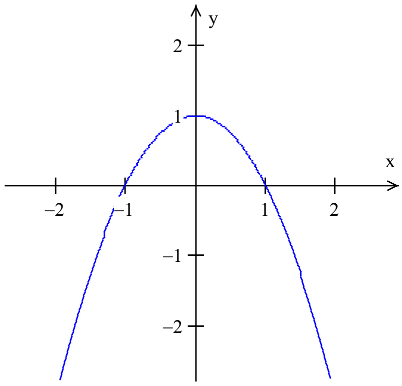
$f(x) = x^2 + 2x - 8$

x	y	
0	-8	$x = 0$
-4	0	*Raiz*
2	0	*Raiz*
-1	-9	*Vértice*



$f(x) = -x^2 + 1$

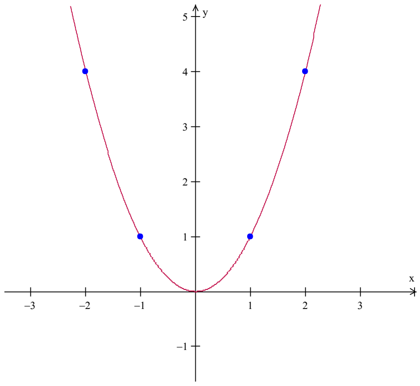
x	y	
0	1	$x = 0$
-1	0	*Raiz*
1	0	*Raiz*
0	1	*Vértice*



$f(x) = x^2$

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

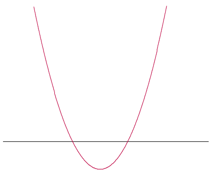
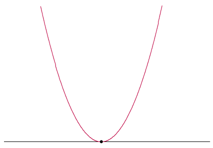
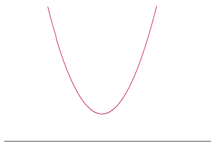
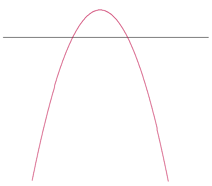
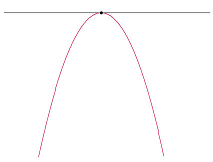
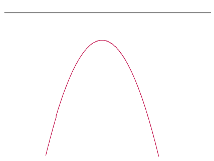
Neste caso, após buscar os principais pontos, foi preciso pegar pontos que ladeiam o vértice.



Para determinar a imagem de uma função quadrática $f(x)$, analisamos o valor do y_v e a concavidade da parábola. Se $a > 0$ a imagem será dada por $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re \mid y \geq y_v\}$ e se $a < 0$, $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re \mid y \leq y_v\}$. Abaixo temos as imagens dos exemplos anteriores.

$\operatorname{Im} f = \{y \in \Re \mid y \geq -9\}$ $\qquad$ $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re \mid y \leq 1\}$ $\qquad$ $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re \mid y \geq 0\}$

Resumo da relação entre o valor do delta e o coeficiente a

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	
$a > 0$				Se o a for maior que zero a parábola tem concavidade voltada para cima.
$a < 0$				Se a for menor que zero a parábola tem a concavidade voltada para baixo.
	Quando delta é maior que zero temos duas raízes reais distintas.	Quando delta é igual a zero temos um raiz, que será o vértice.	Quando delta for negativo não temos raiz real.	