Introdução a matrizes

Professor Fiore

De maneira simples, matriz é definida como uma tabela de números com *m* linhas e *n* colunas. Essa ideia não parece muito interessante, mas o que se pode representar com essas tabelas e o que as operações com matrizes nos permite realizar é relevante para várias áreas de conhecimento. Por exemplo, na computação elas podem ser usadas para representar imagens e as operações com matrizes permite transformar essas imagens, por meio de rotações, ampliações, etc. Na física uma força aplicada em um objeto pode ser representada por um vetor que é representado por uma matriz.

Veja alguns exemplos de matrizes:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad L=\begin{pmatrix}0 & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \qquad R=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ \frac{1}{2} & -5 & 3\end{pmatrix}$$

Para representar uma matriz é usada uma letra maiúscula, os elementos são dispostos dentro de colchetes ou parênteses. Para indicar a localização de cada elemento usa-se uma letra minúscula com subscritos que indicam a linha e a coluna de sua localização.

Veja exemplos da identificação de elementos:

$$a_{22}=-1 \qquad l_{13}=\sqrt{2} \qquad c_{21}=2 \qquad r_{23}=3$$

Cada matriz possui uma ordem, m por n, de acordo com o número de linhas e colunas. A matriz acima R_{2x3} é de ordem 2 por 3, pois ela tem duas linhas e três colunas, enquanto a matriz A_{2x2}, que tem o mesmo número de linhas que colunas, pode ser chamada de quadrada, de ordem 2.

Podemos representar uma matriz genérica como:

$$A_{mxn}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$A_{mxn}=(a_{ij}),\quad com\quad 1\le i\le m,\ \ 1\le j\le n\quad e\quad i,j\in IN$$

Tipos de matrizes e relações

As matrizes são organizadas em tipos, de acordo com a ordem ou a disposição dos elementos. A tabela a seguir exemplifica alguns tipos de matrizes.

Principais tipos de matrizes		
Matriz linha é uma matriz com uma linha e n colunas. $L_{1xn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \end{pmatrix}$	Matriz coluna é uma matriz com uma coluna e m linhas. $C_{mx1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \end{pmatrix}$	Matriz nula (0_{mxn}) é uma matriz com zero em todos os elementos. $0_{mxn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
Matriz quadrada é uma matriz com *k* linhas e *k* colunas, ou seja, o mesmo número de linhas que coluna. $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$	Matriz identidade é uma matriz quadrada que contem 1 nos elementos da diagonal principal* e 0 nos demais. $I_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ Usamos a letra I para identificar a matriz identidade e colocamos subscrito o valor da ordem.	
* A diagonal principal de uma matriz quadrada é formada pelos elementos a_{ij}, com $i = j$.		

Além dos tipos citados na tabela, há algumas relações interessantes entre matrizes.

Toda matriz $A = (a_{ij})$ possui uma matriz ***oposta***, formada por $-A = (-a_{ij})$, o oposto de cada elemento.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Toda matriz $B = (b_{ij})$ possui uma matriz ***transposta,*** formada por $B^t = (b_{ji})$, os elementos da linha da matriz B formam os elementos da coluna da transposta.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 77 & -1 \\ \frac{1}{2} & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 77 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Duas matrizes *A* e *B* são ***iguais***, se e somente se, forem de mesma ordem e cada elemento da matriz A for igual a cada elemento da matriz *B*.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \;\; com \;\; 1 \leq i \leq m \;\; e \;\; 1 \leq j \leq n$$

Uma matriz quadrada C, e apenas as quadradas, possuem uma ***inversa***, simbolizada por C^{-1}, se o produto entre elas resulta na matriz identidade de mesma ordem.

$$C \times C^{-1} = C^{-1} \times C = I \; .$$

Nem todas as matrizes são invertíveis, apenas as que possuem determinante diferente de zero.

> Toda matriz quadrada e apenas as quadradas, possuem um número associado a ela, chamado de determinante.