Multiplicação de matriz

Professor Fiore

Para entender a ideia de multiplicação de matrizes analise o seguinte problema.

O estoque de uma empresa montou algumas tabelas para organizar os materiais. A tabela 1 mostra a quantidade de parafusos e de porcas necessárias paras fabricação das máquinas A, B e C e a tabela 2 mostra o número de máquinas montadas nos dois primeiros meses deste ano. Monte uma terceira tabela que indique o total de parafusos e porcas utilizadas nessas máquinas em cada mês.

Tabela 1 - Componente por Máquina			
	Maquina A	Maquina B	Maquina C
Parafusos	4	5	8
Porcas	3	3	5

Tabela 2 – Máquina por Mês		
	Janeiro	Fevereiro
Máquina A	12	10
Máquina B	10	9
Máquina C	7	7

Tabela 3 - Componente por Mês		
	Janeiro	Fevereiro
Parafusos	154	141
Porcas	101	92

A resolução deste problema sugere como proceder para multiplicar matrizes.

Seja a matriz $A_{mxn} = (a_{ij})$ e a matriz $B_{nxp} = (b_{ij})$, pode-se definir o produto como $A_{mxn}.B_{nxp} = C_{mxp}$, onde cada elemento c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i da matriz A, pelos elementos da coluna j da matriz B e somando-se os produtos obtidos.

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B_{3x2} = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 10 & 9 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_{2x3}.B_{3x2} = C_{2x2} = \begin{bmatrix} \boxed{4.12+5.10+8.7} & 4.10+5.9+8.7 \\ 3.12+3.10+5.7 & 3.10+3.9+5.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154 & 141 \\ 101 & 92 \end{bmatrix}$$

Há uma relação entre a ordem das matrizes e a multiplicação. Para que o produto $A_{mxn}.B_{nxp} = C_{mxp}$ seja possível o número de colunas da matriz A_{mxn} tem de ser igual ao número de linhas da matriz B_{nxp} e o resultado C_{mxp} terá o número de linhas da matriz A_{mxn} e o número de colunas da matriz B_{nxp}. O produto de matrizes não é comutativo.

1. Considere as seguintes matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ determine:

   a. A.B
   b. B.A
   c. A.C
   d. C.A
   e. B.C
   f. C.B
   g. (B.C).A
   h. B.(C.A)
   i. A²
   j. B²
   k. A.I
   l. I.A

2. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, quanto vale A.B?
3. Se o produto entre duas matrizes resulta na matriz nula, uma dela tem de ser obrigatoriamente a nula?
4. O produto entre matriz é comutativo? É associativo?
5. Qual o valor de M.I?

Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada A, dizemos que ela é invertível se houver uma matriz A^{-1}, tal qual $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$.
Um método para encontra a inversa de uma matriz de ordem 2 é o exemplificado abaixo.

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, temos que $A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então, pelo produto entre matrizes:

$$\begin{cases} 5a + 8c = 1 & (2.L1) \\ 2a + 3c = 0 & (5.L2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10a + 16c = 2 \\ 10a + 15c = 0 \end{cases} \quad \text{L1 – L2} \quad \rightarrow \quad 0a + 1c = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} c = 2 \\ a = -3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 5b + 8d = 0 & (2.L1) \\ 2b + 3d = 1 & (5.L2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10b + 16d = 0 \\ 10b + 15d = 5 \end{cases} \quad \text{L1 – L2} \quad \rightarrow \quad 0b + 1d = -5 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} d = -5 \\ b = 8 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Para tirar a prova do resultado, basta resolver o produto $A.A^{-1}$ e verificar se resulta na matriz identidade.
Outro método de encontrar a matriz inversa é o escalonamento, que será discutido em artigos futuros.
Antes de iniciar o calculo da matriz inversa, é útil certificar-se de que ela existe, calculando o determinante.

Determinante

Toda matriz quadrada, e apenas as quadradas, possuem um número associado a ela chamado de determinante.

Se a matriz A for de ordem 1, o determinante será o valor do a_{11}.

Se a matriz A for de ordem 2, o determinante será o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Se a matriz A for de ordem 3, o determinante pode ser obtido pela regra de Sarrus (lê-se Sarrí).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Se o determinante de uma matriz for zero, a matriz não terá inversa.

6. Encontre o determinante das matrizes abaixo e quando possível encontre a inversa.

a. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ c. $C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ d. $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

7. Tire a prova real dos resultados obtidos no exercício anterior.