Regra da cadeia para funções de várias variáveis

Professor Fiore

Caso 01 - Dada uma função $z = f(x, y)$ diferenciável em x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis em relação a variável t. A derivada da função $z = f(x, y)$ em relação a variável t será dada por:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

1. Usando a regra da cadeia, encontre a derivada $\frac{dz}{dt}$, para as funções abaixo.
    a. $z = 2x^2y$, $x = 2t + 3$ e $y = -3t$
    b. $z = x^2y + 2xy$, $x = 2t^2$ e $y = 1 - t^2$
    c. $z = \sin x \, . \cos y$, $x = \pi t$ e $y = t^2$
    d. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = e^{3t}$ e $y = e^{-t}$
    e. $z = \ln(x + y^2)$, $x = t + 2$ e $y = t^3$

2. A equação $PV = nRT$ relaciona a pressão P o volume V e a temperatura T de um gás ideal, com n sendo o número de mols do gás (um mol equivale aproximadamente $6{,}022.10^{23}$ moléculas da substância) e R uma constante para gases ideais (que vale aproximadamente $0{,}082\, {}^{L.atm}/_{K.mol}$ ou $62{,}36\, {}^{L.mmHg}/_{K.mol}$).

Para determinado número de mol de um gás ideal temos a relação $PV = 12T$. Em um determinado instante, a pressão vale 8 atm e ***diminui*** com o tempo a uma taxa de 0,3 atm/s e a temperatura vale 500K, ***aumentando*** com o tempo a uma taxa de 10K/s. Sendo assim, determine a variação do volume em relação ao tempo na condição dada.

3. Considere que a tensão V (em Volts) de um circuito simples ***decresce*** a uma taxa de 0,05 V/s, enquanto a bateria descarrega, e a resistência R (em ohms) ***aumenta*** a uma taxa de 0,1 Ω/s, conforme o circuito aquece. Usando a lei de Ohms $V = R.I$ determine a taxa de variação da corrente I (em Ampères) no instante em que a resistência é de 300Ω e a tensão é de 40V.

4. O raio de um cone circular reto aumenta a uma taxa constante de 6 cm/s enquanto a altura diminui a taxa constante de 9 cm/s. Qual a variação do volume do cone, quando o raio vale 100 cm e a altura 200 cm?

Caso 02 - Dada uma função $z = f(x, y)$ diferenciável em x e y, onde $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ são funções diferenciáveis em relação às variáveis u e v. A deriva parcial da função $z = f(x, y)$ em relação a variável u e em relação a variável v será dada respectivamente por:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

1. Usando a regra da cadeia, encontre $\frac{\partial z}{\partial u}$ sendo $z = x^{10}y^{15}$, $x = u + v$ e $y = 2 + uv$.
2. Usando a regra da cadeia, encontre $\frac{\partial f}{\partial v}$ sendo $f(x, y) = e^{2x+y}$, $x = {}^{u}/_{v}$ e $y = uv$.
3. Usando a regra da cadeia, encontre $\frac{\partial z}{\partial t}$ e $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ sendo $z = e^x . \cos y$, $x = 4t$ e $y = \pi\theta^2$.
4. Usando a regra da cadeia, encontre $\frac{\partial z}{\partial m}$ e $\frac{\partial z}{\partial n}$ sendo $z = y \sin x$, $x = \pi m$ e $y = mn$.

Caso geral - Supondo que a função $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ seja diferenciável para as n variáveis x_1, x_2, x_3, ... x_n, onde cada x_i é uma função diferenciável nas m variáveis u_1, u_2, u_3 ..., u_m. Então a derivada parcial da função f para cada uma das funções u_j será dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial u_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_j} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_j}$$

1. Para a função $f(x, y, z) = x.y^3 + x.y.z^5$, onde $x = rst$, $y = e^r + t$ e $z = e^s + t$, determine as derivadas parciais de f em relação as variáveis r, s e t.

2. O comprimento x, a largura y e a altura h de uma caixa retangular variam em função do tempo. Em certo instante, as dimensões da caixa são x = 1 metro e y = h = 2 metros, x e y aumentam a uma taxa de 2 m/s enquanto h diminui a taxa de 3 m/s.

i. Determine a taxa de variação do volume em relação ao tempo.
a. Menos de 6 m³/s
b. Exatamente 6 m³/s
c. Entre 6 m³/s e 8 m³/s
d. Exatamente 8 m³/s
e. Mais que 8 m³/s

ii. Determine a taxa de variação da área da superfície em relação ao tempo.
a. Menos de 10 m²/s
b. Exatamente 10 m²/s
c. Entre 10 m²/s e 12 m²/s
d. Exatamente 12 m²/s
e. Mais que 12 m²/s

Para o problema anterior, considere a versão simplificada da regra geral para funções $f(x, y, z)$, com x, y e z variando em função do tempo t.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$