## Logaritmo

Professor Fiore

O logaritmo está associado a potenciação de acordo com a definição

$$\log_{\underset{\text{Base}}{a}} \underset{\text{Logaritmando}}{b} = \overset{\text{Logaritmo}}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{Base}}{a}^{\overset{\text{Expoente}}{c}} = \underset{\text{Potência}}{b}$$

Por exemplo $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$.

Segue principais convenções, consequências da definição e propriedades dos logaritmos.

- Para evitar erros existem condições de existência para os logaritmos. A base $a$ e o logaritmando $b$ são restritos a $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$.
- Por convenção, se a base não for escrita ela vale 10, $\log x = \log_{10} x$, são os logaritmos decimais.
- Quando a base é o número de Euler, $e = 2{,}71828...$, o logaritmo pode ser escrito $\ln x$, chamado logaritmo de natural.
- Algumas consequências da definição são:
  - $\log_a 1 = 0$
  - $\log_a a = 1$
  - $a^{\log_a b} = b$
  - $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
  - $(\log_a b).(\log_b a) = 1$
- Propriedades operatórias

  I. $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

  II. $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

  III. $\log_a b^n = n.\log_a b$
- Mudança de base

  IV. $\log_a b = \dfrac{\log_x b}{\log_x a}$

No passado os logaritmos funcionavam como calculadoras, a partir de tabelas de logaritmos, era possível resolver rapidamente cálculos que sem eles levaria dias. Hoje os logaritmos são usados para resolver problemas, equações exponenciais para determinar escalas de medidas, com a magnitude de terremotos, a acidez de soluções aquosa, os decibéis, o decaimento radioativo, a magnitude das estrelas, etc...

## Atividades para treino

1. Determine os valores dos logaritmos abaixo, a partir da definição:
   a. $\log_2 1024 =$
   b. $\log_3 2187 =$
   c. $\log_7 343 =$
   d. $\log_5 625 =$
   e. $\log_4 1024 =$
   f. $\log_{10} 1000 =$
   g. $\log_2 0{,}25 =$
   h. $\log_3 \frac{1}{27} =$
   i. $\log_5 0{,}008 =$
   j. $\log_{10} 0{,}001 =$
   k. $\log_9 \frac{1}{9} =$
   l. $\log_{10} 0{,}1 =$

2. Considerado as aproximações $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$ , e as propriedades operatórias, determine:
   a. $\log 6 =$
   b. $\log 72 =$
   c. $\log \frac{3}{2} =$
   d. $\log \frac{8}{9} =$
   e. $\log 2^7 =$
   f. $\log 3^{13} =$
   g. $\log 5 =$
   h. $\log 0{,}2 =$
   i. $\log 1{,}2 =$

3. Considerando as aproximações $\ln 2 = 0{,}693$ e $\ln 3 = 1{,}099$, e as propriedades dos logaritmos, determine:
   a. $\ln 6 =$
   b. $\ln e =$
   c. $\ln \frac{1}{3} =$
   d. $\ln e^5 =$
   e. $\ln \frac{e}{3} =$
   f. $\ln 3e =$

4. Considerado as aproximações $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, resolva as equações exponenciais abaixo.
   a. $3^x = 10$
   b. $10^x = 6$
   c. $10^x = 72$
   d. $2^x = 30$
   e. $5^x = 10$
   f. $3^x = 12$
   g. $2^x = 15$
   h. $10^x = \frac{3}{2}$
   i. $0{,}01^x = 2$

5. Confira os resultados anteriores usando uma calculadora científica.

6. Encontre um exemplo numérico que justifique a necessidade das condições de existência dos logaritmos, um exemplo para cada condição. (Dica, use valores não permitidos e explique o problema encontrado)
   a. $a > 0$
   b. $a \neq 1$
   c. $b > 0$

7. Justifique com exemplos numéricos cada uma das consequências da definição citadas acima. (Dica, escolha números que você saiba calcular os logaritmos)

8. Prove cada uma das propriedades operatórias, ou pesquise e estude uma prova.

9. Determine os valores de x para que cada caso abaixo. (dica use a definição e rescreva o problema como uma potência)
   a. $\log_2(x-2) = 2$
   b. $\log_5(3-2x) = 2$
   c. $\log_{1/2}(x^2 + 4x - 5) = -4$

10. Anteriormente os logaritmos eram usados como ‘calculadora’, usando as aproximações $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule o valor aproximado das expressões abaixo, sem calculadora.
    a. $\frac{2^{13}}{3^7} =$
    b. $\frac{6^5.\sqrt{2}}{3^7} =$
    c. $\frac{2^{20}.\sqrt[3]{3}}{12^5} =$