Professor Fiore

Ao iniciar o estudo das derivadas, é fundamental entender a ***definição de derivada*** e o seu ***significado***. Mas na prática, para ganhar tempo, usamos as regras de derivação, oriundas da definição. Quem estuda cálculo deve entender a ***origem das regras*** de derivação e saber ***usá-las*** corretamente ao derivar funções. Todas as regras podem ser provadas, mas nem sempre há tempo para isso nos cursos tradicionais. Esta atividade tem por objetivo ajudá-lo a provar algumas regras básicas e construir outras pela análise de exemplos numéricos.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1. Derive pela definição as funções abaixo e prove que a derivada de $f(x) = ax$ é $f'(x) = a$.

$$g(x) = 2x \qquad h(x) = 3x \qquad f(x) = ax$$

2. Mostre que a derivada da função $f(x) = x$ é $f'(x) = 1$, consequência do caso anterior, quando $a = 1$.
3. Derive pela definição as funções abaixo e prove que a derivada de $f(x) = a$ é $f'(x) = 0$.

$$g(x) = 2 \qquad h(x) = 5 \qquad f(x) = a$$

4. Derive pela definição as funções abaixo e após notar o padrão existente, indique a derivada de $f(x) = x^n$.
(Dica, caso ache conveniente, calcule separadamente os valores de $(x + \Delta x)^2$, $(x + \Delta x)^3$ e $(x + \Delta x)^4$)

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^3 \qquad h(x) = x^4$$

5. Derive pela definição as funções abaixo e justifique a propriedade $\frac{d}{dx}[c.f(x)] = c.f'(x)$.

$$f(x) = 5x^2 \qquad g(x) = -12x \qquad h(x) = 7x^3$$

6. Derive pela definição as funções abaixo e justifique a propriedade $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$.

$$f(x) = x^2 + 3x - 1 \qquad g(x) = 3x^2 - x + 10$$

Formulário 01 – Após as atividades é esperado que você ***entenda*** as regras e propriedades abaixo.

$$\frac{d}{dx}[ax] = a \qquad \frac{d}{dx}[x] = 1 \qquad \frac{d}{dx}[a] = 0 \qquad \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

$$[c.f(x)]' = c.f'(x) \qquad [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

Alguns livros usam $h$ no lugar de $\Delta x$ escrevendo a definição de derivada como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Há vários símbolos para representar a derivada, segue os principais: $f'(x)$ ou $y'$ ou $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}[f(x)]$ ou $[f(x)]'$.

7. Use as regras do formulário 01 para encontrar as derivadas abaixo e ***memorize*** as regras.

a. $f(x) = \sqrt{3}$
b. $y = x^{10}$
c. $g(x) = 6x + x^5$
d. $y = 3x^2 - 4x + 12$
e. $h(x) = -3x^3 + 12x$
f. $p(x) = x^7 + x^5 + x^3 - 1$
g. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x$
h. $i(x) = \frac{x}{4} + x^2$

8. Algumas funções precisam ser rearranjadas antes de aplicar as regras de derivação. Organize as funções abaixo e derive-as usando as regras do formulário 01.

Dica, para resolver as atividades a seguir, talvez seja útil ***lembrar*** (e jamais esquecer) as propriedades abaixo.

$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ $abc + acd = ac(b + d)$ $\frac{a.(x+y)}{a} = x + y$ (para $a \neq 0$)

a. $f(x) = \frac{x^3}{3}$
b. $g(x) = \frac{1}{x}$
c. $h(x) = \frac{1}{x^2}$
d. $y = \frac{1}{x^3}$
e. $f(x) = \sqrt{x}$
f. $g(x) = \sqrt[3]{x}$
g. $h(x) = \sqrt[3]{x^2}$
h. $y = \frac{x^3+4x}{x}$
i. $g(x) = \frac{x^2-x^3}{x}$
j. $f(x) = \frac{4x^2-6x^3}{2x}$

9. Pesquise em algum livro de cálculo a prova para as derivadas das funções trigonométricas abaixo.

$\frac{d}{dx}[sin\, x] = cos\, x$ $\frac{d}{dx}[cos\, x] = -\, sin\, x$ $\frac{d}{dx}[tan\, x] = sec^2 x$

10. Pesquise em algum livro de cálculo a prova para as derivadas das funções exponenciais e logarítmicas abaixo.

$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x. ln\, a$ $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$ $\frac{d}{dx}[log_a x] = \frac{1}{x\, ln\, a}$ $\frac{d}{dx}[ln\, x] = \frac{1}{x}$

Formulário 02 – Você deve ***entender*** e ***memorizar*** todas essas ideias e simbologias abaixo.

$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{d}{dx}[sin\, x] = cos\, x$ $\frac{d}{dx}[cos\, x] = -\, sin\, x$ $\frac{d}{dx}[tan\, x] = sec^2 x$

$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x. ln\, a$ $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$ $\frac{d}{dx}[log_a x] = \frac{1}{x\, ln\, a}$ $\frac{d}{dx}[ln\, x] = \frac{1}{x}$

11. Use as regras do formulário 01 e 02 para encontrar as derivadas abaixo.

a. $f(x) = e^x + sin\, x$
b. $f(x) = ln\, x + 3e^x$
c. $f(x) = 2^x + cos\, x - x^2$
d. $f(x) = \sqrt{x} + 5\, tan\, x$
e. $f(x) = 3x^5 - 3\, ln\, x$
f. $f(x) = 3e^x - 2\, sin\, x + 1$
g. $f(x) = e^x + sin\, x$
h. $f(x) = -4x^5 - 3\sqrt{x}$
i. $f(x) = x^3 + 3^x + 3x$

12. Encontre as derivadas das funções abaixo e discuta com algum colega a diferença entre cada situação.

a. $f(x) = 3^x$
b. $g(x) = x^3$
c. $h(x) = e^x$

13. Mostre que $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$ é consequência de $\frac{d}{dx}[a^x] = a^x. ln\, a$, para isso considere $a = e$ e lembre-se: $ln\, e = 1$.

14. Mostre que $\frac{d}{dx}[ln\, x] = \frac{1}{x}$ é consequência de $\frac{d}{dx}[log_a x] = \frac{1}{x\, ln\, a}$.

15. Sem efetuar cálculos indique os valores dos limites abaixo:

a. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$
b. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$
c. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x}$

16. Faça um resumo das explicações associadas a esses tópicos encontradas nos livros do plano de ensino. Assim você entenderá ainda mais as regras, a origem delas e mais exemplos de uso. (Normalmente você encontrará mais detalhes no capítulo que fala sobre regras de derivada)

17. Monte um formulário com regras e derivação, para consulta rápida durante as atividades futuras.

18. Monte um formulário com regras de matemática básica, úteis para organizar funções antes e depois de derivá-la. (Não confunda regras de matemática básica com regras de derivação, cada uma tem sua aplicação)