Derivada – regra do produto e regra do quociente

Professor Fiore

Já foi estudado que **soma de funções** pode ser derivada 'pedaço por pedaço' e a derivada do produto entre um número e uma função, é o número multiplicado pela derivada da função.

Regra para soma $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$

Regra para produto entre número e função $\frac{d}{dx}[c.f(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$

Exemplos: $f(x) = x^3 + e^x - \cos x$ $g(x) = 12e^x$ $y = 5x^3 - 7$ $f(x) = \frac{x^7}{5}$

Entretanto, algumas funções precisam de cuidados adicionais.

Exemplos: $f(x) = x^2 \sin x$ $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ $h(x) = \cos(x^2 + x)$

Para esses novos casos, temos a **regra do produto**, útil para produto entre funções. A **regra do quociente**, quando há divisão entre funções e a **regra da cadeia**, para funções 'dentro' de funções, funções compostas.

Regra do produto $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ ou $[f.g]' = f'.g + f.g'$

1. Derive usando a regra do produto

a. $y = x^3.\cos x$

b. $f(x) = xe^x$

c. $f(x) = (e^x + 2)\sin x$

d. $g(x) = x^3 \ln x$

e. $y = e^x\sqrt{x}$

f. $f(x) = (x^2 - x^3)\ln x$

g. $y = \cos x . \sin x$

h. $g(x) = e^x \cos x$

i. $y = x^3.\tan x$

j. $f(x) = e^x \sin x$

k. $g(x) = (x-3)\ln x$

l. $f(x) = (x-1)e^x$

m. $f(x) = e^x \ln x$

n. $y = x^2 \log_2 x$.

o. $g(x) = (x + 3x^2 - e^x)\cos x$

2. Três estudantes do curso de engenharia estão discutindo como derivar a função $f(x) = x^5.x^2$. Abaixo você encontra a resolução de cada um. Quem está correto? Explique por que o único que errou foi o terceiro.

$f(x) = x^5.x^2$ Derivando... $f'(x) = 5x^4.x^2 + x^5.2x$ $f'(x) = 5x^6 + 2x^6$ $f'(x) = 7x^6$	$f(x) = x^5.x^2$ $f(x) = x^7$ Derivando... $f'(x) = 7.x^6$	$f(x) = x^5.x^2$ Derivando... $f'(x) = 5x^4.2x$ $f(x) = 10x^5$

3. Considere as funções $f(x) = x^3.x^2$ $g(x) = x^3.x^5$ $y = .x^3.x^{-7}$

a. Derive as funções usando a regra do produto.

b. Derive novamente sem a regra do produto, antes de derivar use a propriedade de potenciação $x^a.x^b = x^{a+b}$.

c. O que você conclui? Derivar 'pedaço por pedaço' funciona? Ou precisamos da regra do produto?

4. Use a regra do produto mais de uma vez para derivar as funções abaixo.

$y = x \cos x . \sin x$ $f(x) = x^3.e^x \sin x$ $g(x) = xe^x.\ln x$

Regra do quociente: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$ **ou** $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'.g-f.g'}{g^2}$

5. Derive as funções usando a regra do quociente

a. $y = \frac{e^x}{x^2}$

b. $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

c. $y = \frac{e^x+3x}{\sin x}$

d. $f(x) = \frac{\ln x+\cos x}{e^x}$

e. $y = \frac{x^3+1}{x^2+1}$

f. $f(x) = \frac{e^x+x^3+3}{x^2+2}$

g. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

h. $y = \frac{\tan x}{e^x}$

i. $y = \frac{2^x}{x}$

6. Considere as funções $y = \frac{x^5}{x^2}$ $f(x) = \frac{x^7}{x}$ $g(x) = \frac{x^3}{x^5}$

a. Derive as funções usando a regra do quociente.

b. Derive novamente sem a regra do quociente, antes de derivar use a propriedade de potenciação $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$.

c. O que você conclui? Derivar 'pedaço por pedaço' funciona? Ou precisamos da regra do quociente?

7. Mostre que $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$ usando a regra do quociente.

(Lembra-se que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ e $\sec x = \frac{1}{\cos x}$)

8. Use as regras estudadas (produto e quociente) para derivar as funções:

a. $y = \frac{e^x \cos x}{x}$

b. $f(x) = \frac{xe^x}{\ln x}$

c. $g(x) = \frac{e^x \ln x}{x}$

9. Use as regras estudadas para derivar as funções abaixo.

(Dica, nem todas precisam das regras novas (produto e quociente), simplifique a função antes de derivar)

a. $y = \frac{e^x+3xe^x}{e^x}$

b. $y = \frac{4x^3-2x^2}{x}$

c. $y = \frac{-3}{x^5}$

d. $y = \frac{e^x+3xe^x}{\sin x}$

e. $y = \frac{e^x \cos x}{\cos x}$

f. $y = \frac{\sin x}{x}$

g. $y = \frac{x^3}{x^2+1}$

h. $y = \frac{x^3}{\ln x}$

i. $y = \frac{x^3+x}{x^2+1}$

10. Explique a diferença entre as regras abaixo e indique um exemplo de aplicação de cada uma.

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[c.f(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$