Atividades de revisão – P1 - CGA

Professor Fiore

Estas atividades têm por objetivo ajudá-lo a lembrar alguns dos conceitos estudados na disciplina. Para se preparar para a prova você deve estudar tudo o considerado desde o início do semestre. Para isso use as notas de aula, a apostila, o material do professor e os livros do plano de ensino.

Cálculo

1. Descreva o que é uma função e dê exemplos.

2. Qual ao domínio para as funções abaixo:

a. $f(x) = \sqrt{x+3}$

b. $g(x) = \frac{7}{3-x}$

c. $y = \frac{5}{\sqrt{x+3}}$

3. Prove pela definição que a derivada da função $f(x) = ax$ é $f'(x) = a$.

4. Construa um formulário com as regras de derivação e pelo menos um exemplo do uso de cada uma.

5. Determine a derivada das funções abaixo e, se possível, simplifique o resultado.

a. $y = \frac{1}{x^3}$

b. $g(x) = \sqrt[3]{x}$

c. $f(x) = \frac{4x^2-6x^3}{2x}$

d. $g(x) = e^x \cos x$

e. $g(x) = x^3 \ln x$

f. $y = \frac{e^x+3x}{\sin x}$

g. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

h. $y = \ln(x^2)$

i. $f(x) = e^{5x}$

j. $y = \frac{1}{(3x+1)^8}$

k. $y = e^{3x}. \ln x$

l. $f(x) = \frac{\cos(3x)}{e^x}$

6. Explique usando exemplos numéricos que a derivada da função $y = e^{ax}$ é igual a $y' = ae^{ax}$.

7. Uma bola foi lançada do alto de uma plataforma e a altura dela (em metros) em função do tempo (em segundos), é dada pela função $h(t) = -5t^2 + 30t + 10$.

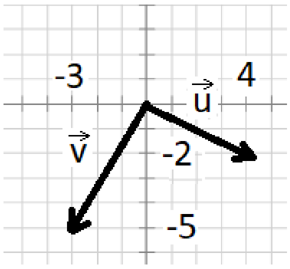
a. Determine a função que dá a velocidade vertical da bola.

b. Qual a velocidade vertical da bola ao tocar o chão?

8. Em uma empresa, pedaços quadrados, com 20 cm de lado, sobram de uma chapa de metal usada na construção de uma máquina. Como essa sobra de material não tem outra utilização, você decide fazer pequenas caixinhas sem tampas para oferecer como brindes. As caixas são montadas cortando quadrados de tamanho x das quatro pontas e dobrando as abas para cima. Quais as dimensões da caixinha que maximiza o volume dela?

9. Você precisa fazer caixinhas com base quadrada para armazenar 1 litro de um produto (1L = 1000 cm^3). Quais as dimensões da caixa para que a quantidade de material usada seja minimizada?

10. Um vazamento de óleo está causando uma mancha circular, onde o raio desta mancha aumenta a taxa de 0,2m/s. Qual a taxa de variação da área contaminada em função do tempo quando o raio for de 100metros?



11. Considerando os vetores da figura ao lado, determine $\vec{r} = -2\vec{u} - 2\vec{v}$.

12. Considere os vetores $\vec{u} = (-1, \quad 3)$ e $\vec{v} = (2, \quad 1)$, determine o vetor $\vec{w} = (0, \quad -2)$ com combinação de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

13. Mostre que o resultado anterior está correto.

14. Dado os pontos $A = (1 \quad 4)$ e $B = (-3 \quad 0)$.

a. Determine o seguimento orientado $\overrightarrow{AB}$ na base canônica.

b. Qual a distância entre os pontos A e o ponto B?

15. Do os vetores no espaço, $\vec{u} = (-2, \quad 4, \quad -4)$, $\vec{v} = (0, \quad 1, \quad -3)$ e $\vec{w} = (1, \quad -7, \quad 0)$.

a. Determine o tamanho de cada vetor.

b. Determine o versor de cada vetor.

16. Encontre um vetor com o dobro do tamanho do vetor $\vec{v} = (0, \quad 1, \quad -3)$ mesma direção e mesmo sentido.

17. Encontre o vetor com tamanho $\sqrt{2}$, mesma direção e sentido oposto que o vetor $\vec{w} = (1, \quad -7, \quad 0)$.

Considerações e algumas respostas (em caso de divergência consulte o professor em sala de aula)

Cálculo

1. Verifique o que foi discutido em sala e explicações que os livros dão. Explique que relacionamos grandezas com funções e para a relação poder ser chamada de função cada valor do domínio tem de ter uma única imagem no contra domínio.
2. Os domínios são:

a. $D = \{x \in IR | x \geq -3\}$ b. $D = \{x \in IR | x \neq 3\}$ c. $D = \{x \in IR | x > -3\}$

3. Ver no caderno, foi feito em sala.
4. Construir com base em consultas nos livros indicados e nas notas de aula.
   Não se esqueça de colocar todas as regras básicas oriundas da definição, a regra do produto, do quociente e da cadeia.
5. Preste atenção que, em alguns casos, a solução será mais facilmente encontrada se você simplificar a função antes de derivas. E sempre que possível você deve simplificar o resultado final.

a. $y' = \frac{-3}{x^4}$

b. $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

c. $f'(x) = 2 - 6x$

d. $g'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$

e. $g'(x) = 3x^2 \ln x + x^2$

f. $y' = \frac{(e^x+3)\sin x - (e^x+3x)\cos x}{\sin^2 x}$

g. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

h. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$

i. $f'(x) = 5e^{5x}$

j. $y' = \frac{-24}{(3x+1)^9}$

k. $y' = 3e^{3x}\ln x + \frac{e^{3x}}{x}$

l. $f'(x) = \frac{-3\sin(3x) - \cos(3x)}{e^x}$

Lembre-se que, sempre que necessários, você pode usar um aplicativo ou o site https://www.wolframalpha.com/ para encontrar a soluções.

6. Explique usando exemplos numéricos e a regra da cadeia, onde a derivada de uma função composta pode ser encontrada como 'a derivada da função de dentro, vezes a derivada da função de fora'.
   Por exemplo, a derivada de $y = e^{3x}$ é $y' = 3e^{3x}$ e a derivada de $y = e^{5x}$ é $y' = 5e^{5x}$... sendo assim a derivada de $y = e^{ax}$ é $y' = ae^{ax}$.
7. Como a função nos dá a altura da bola, a velocidade vertical dela será dada pela taxa de variação da altura, assim:

a. $h'(t) = v_{vert.}(t) = -10t + 30$

b. Neste caso, antes de descobrir a velocidade temos de saber em que momento ela toca o solo. Para isso considere $h(t) = 0$, resolva a equação de segundo grau, $0 = -5t^2 + 30t + 10$. Note que o único valor de t coerente ao caso é $t = 6{,}32$ segundos (o outro e negativo, fora do contexto0. Por fim para descobrir a velocidade vertical no momento que ela toca o solo, calcule $v_{vert.}(6{,}32) = -10.6{,}32 + 30 = -33{,}2\ m/s$

8. Considerando o problema encontramos a função $V(x) = 400x - 80x^2 + 4x^3$. Como desejamos encontrar o volume máximo possível, derivamos a função e igualamos a zero, encontrando o valor coerente $x = \frac{10}{3}$.
   Assim as dimensões aproximadas que maximizam o volume da caixinha são 13,33cmX13,33cmX3,33cm.
9. As dimensões da caixa que minimiza a quantidade de material para a caixa é 10cmX10cmX10cm. Isto pode ser encontrado com a função $A = 2x^2 + \frac{4000}{r}$, onde x representa a medida do lado da base da caixa e A a área da superfície da caixa. Os passos da resolução são semelhantes ao problema anterior.
10. Usando a regra da cadeia e lembrando que a área do círculo é dada por $A = \pi r^2$, temos $\frac{dA}{dt} = 40\pi$ m³/s.

Geometria analítica

11. $\vec{r} = (-2, 14)$
12. Considerando $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ e montando o sistema, encontramos $\vec{w} = \frac{-4}{7}\vec{u} + \frac{-2}{7}\vec{v}$.
13. Para conferir, basta fazer a conta $\frac{-4}{7}\vec{u} + \frac{-2}{7}\vec{v}$ e verificar que o resultado é $\vec{w} = (0, \quad -2)$
14. Em aula provamos que $\overrightarrow{AB} = B - A$, assim:
    c. $\overrightarrow{AB} = (-4, -4)$.
    d. A distância entre os pontos equivale ao tamanho do seguimento orientado por eles obtido, assim temo $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
15. Para encontras o tamanho de um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$, usamos $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o versor é dado por $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.
    e. $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = \sqrt{10}$ e $|\vec{w}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
    f. $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$, $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(0, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{-3\sqrt{10}}{10}\right)$ e $\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{-7\sqrt{2}}{10}, 0\right)$.
16. Para encontrar um vetor com o dobro do tamanho e mesmo sentido, basta multiplicar por +2, assim $2\vec{v} = (0, \quad 2, \quad -6)$
17. Para encontrar um vetor com um tamanho específico e com mesma direção, basta multiplicar o versor do vetor pelo tamanho desejado e se quiser mudar o sentido, use o ‘menos’. $-\sqrt{2}.\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \left(\frac{-1}{5}, \frac{7}{5}, 0\right)$