# Vetores – produto escalar

Professor Fiore

O produto escalar entre o vetor $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ e o vetor $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$, é definido como:

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

Propriedades do produto escalar

- O produto escalar é comutativo $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
- Vale a distributiva entre três vetores, $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.
- Dado um escalar $\alpha$, temos $\alpha.\vec{u}.\vec{v} = \alpha.(\vec{u}.\vec{v}) = (\alpha.\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\alpha.\vec{v})$.
- Se $u$ não for nulo, $\vec{u}.\vec{u} > 0$, e para $u$ nulo $\vec{u}.\vec{u} = 0$.
- O produto escalar $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$
- Desigualdade Schwarz, $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$.

Além da definição apresentada, o produto escalar pode ser calculado a partir de uma definição geométrica. Considerando os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e o ângulo $\theta$ entre eles, o produto escalar é dado por:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

- Dado dois vetores não nulos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e o ângulo $\theta$ entre eles temos:
  - O ângulo $\theta$ entre eles terá valores $0° \leq \theta \leq 180°$.
  - O ângulo $\theta$ será 0° se eles tiverem mesma direção e mesmo sentido.
  - O ângulo $\theta$ será 180° se eles tiverem mesma direção e sentido oposto.
  - $\vec{u}.\vec{v} = 0$, se e somente se $\vec{u} \perp \vec{v}$, ou seja, $\vec{u}.\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 90°$.
  - $u.v > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0° \leq \theta < 90°$.
  - $u.v < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 90° < \theta \leq 180°$.

Comentários adicionais do professor:

- Não esqueça que, o produto escalar entre dois vetores será um número real.
- Um vetor pode ser escrito como combinação linear dos vetores que formam a base deles, $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$, ou usando coordenadas, $\vec{u} = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)$. Enquanto o produto escalar entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser representado por $< \vec{u}, \quad \vec{v} >$.
- Usando a definição algébrica do produto escalar podemos calcular o ângulo entre dois vetores. E para facilitar o cálculo, alguns livros reescrevem a definição geométrica como $\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$.
- O cálculo do produto escalar coincide com o cálculo de algumas grandezas físicas. Por exemplo, o *trabalho* realizado por uma força $\vec{F}$ ao longo de um deslocamento $\vec{d}$ é equivalente ao produto escalar $\vec{F}.\vec{d}$.
- Use o livro indicado pelo professor para analisar exemplos e considerar mais detalhes sobre produto escalar e aplicações. Como exemplo o uso de produto escalar para encontrar a projeção de um vetor em outro...

Atividades

1. Dados os vetores $\vec{u} = (1 \quad 0 \quad -1)$ e $\vec{v} = (1 \quad -1 \quad 3)$, calcule:
   a. $u.v$
   b. $v.u$
   c. Como esse exemplo nos ajuda a ‘entender’ a propriedade comutativa?

2. Determine o valor do cosseno do ângulo entre os vetores abaixo e indique se o ângulo é maior, menor ou igual a 90°
   a. $u = (1 \quad 2 \quad -1)$ e $v = (1 \quad -1 \quad 0)$
   b. $u = (-1 \quad 0 \quad 3)$ e $v = (4 \quad -2 \quad 2)$
   c. $u = (2 \quad 0 \quad 1)$ e $v = (-1 \quad 0 \quad 2)$
3. Use uma calculadora para encontrar o ângulo entre os vetores da atividade anterior.

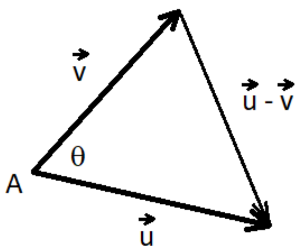
4. Sem usar calculadora, determine o ângulo entre os vetores (Considere e memorize a tabela abaixo).
   a. $\vec{u} = (1 \quad 0 \quad -1)$ e $v = (1 \quad 1 \quad 0)$
   b. $u = (1 \quad 1 \quad 4)$ e $v = (-1 \quad 2 \quad 2)$
   c. $u = (3 \quad 3 \quad 0)$ e $v = (2 \quad 1 \quad -2)$
   d. $u = (0 \quad 1 \quad -1)$ e $v = (1 \quad 1 \quad 4)$

| | **0°** | **30°** | **45°** | **60°** | **90°** | **120°** | **135°** | **150°** | **180°** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sen** | 0 | $^1/_2$ | $^{\sqrt{2}}/_2$ | $^{\sqrt{3}}/_2$ | 1 | $^{\sqrt{3}}/_2$ | $^{\sqrt{2}}/_2$ | $^1/_2$ | 0 |
| **Cos** | 1 | $^{\sqrt{3}}/_2$ | $^{\sqrt{2}}/_2$ | $^1/_2$ | 0 | $-^1/_2$ | $-^{\sqrt{2}}/_2$ | $-^{\sqrt{3}}/_2$ | -1 |

5. Qual o ângulo entre o vetor $\vec{u}_1 = (2 \quad 1 \quad 2)$ e o eixo x? e o eixo y? e o eixo z?
   (Dica, para representar o eixo podemos usar os vetores da base, por exemplo, o vetor $\hat{\imath} = (1 \quad 0 \quad 0)$ pode representar a direção do eixo x. Use calculadora para encontrar o ângulo)

6. Dados os vetores $\vec{u} = (1 \quad x \quad -1)$ e $\vec{v} = (1 \quad -1 \quad 3)$, determine o valor x, para que sejam ortogonais.
7. Sabendo que $\vec{u} \perp \vec{v}$, $|\vec{u}| = 2$ e $|\vec{v}| = 4$, determine $(3\vec{u} + 2\vec{v}).(-2\vec{u} - 3\vec{v})$.

8. Desenvolva a expressão $|u + v|^2 = (u + v)(u + v)$.




9. Prove a definição geométrica:
   a. Desenvolva a expressão $|u - v|^2$.
   b. Aplique a lei dos cossenos na figura ao lado.
   c. Mostre usando os resultados anteriores que $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$.
10. Considerando o vetor ‘genérico’ $u = (x \quad y \quad z)$, Prove que $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$.

Respostas

2a) $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{12}} = \ldots = \frac{-\sqrt{3}}{6}$, produto escalar negativo indica ângulo maior que 90°.    3a) aprox.106° 46’

2b) $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{240}} = \ldots = \frac{\sqrt{15}}{30}$, produto escalar positivo, indica ângulo menor que 90°    3b) aprox. 82° 34’

2c) e 3c) $\cos\theta = 0 \rightarrow \theta = 90°$