Vetores – produto vetorial

Professor Fiore

Diferente do produto escalar, que tem por resultado um número, o produto vetorial resulta em um vetor e para calcular usamos o conceito de determinante.

Dado dois vetores $\vec{u} = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)$ e $\vec{v} = (x_2 \quad y_2 \quad z_2)$, definimos o produto vetorial como:

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Sobre o produto vetorial podemos acrescentar que:

- O produto vetorial não é comutativo, a ordem entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é importante e faz diferença.
- Apesar de não ser comutativo, temos a relação $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$.
- Dados dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$, se e somente se $\vec{u}//\vec{v}$.
- O vetor $\vec{u}\wedge\vec{v}$ é ortogonal simultaneamente a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja, $\vec{u}\wedge\vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u}\wedge\vec{v} \perp \vec{v}$.
- Para visualizar o sentido do produto vetorial vale a regra da mão direita.
- Seja θ o ângulo entre dois vetores, o módulo do produto vetorial é dado por $|\vec{u}\wedge\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.sin\,\theta$.
- Não é aconselhável encontrar o ângulo entre dois vetores a partir do produto vetorial, pois para um valor de seno temos dois ângulos entre 0° e 180°, correspondente.
- Podemos simbolizar o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como $\vec{u}\wedge\vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$, onde lemos "u vetorial v".
- Dois vetores, com direções distintas, definem um paralelogramo e o módulo do produto vetorial indica a área do paralelogramo.
- Se dois vetores indicam dois lados de um triângulo, a área do triangulo será igual a metade do modulo do produto vetorial.

Atividades

1. Dados os vetores $\vec{u} = (1 \quad 0 \quad -1)$ e $\vec{v} = (1 \quad -1 \quad 3)$, verifique a veracidade da afirmação $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$.
2. Encontre um vetor ortogonal a $\vec{u} = (-1 \quad 2 \quad 0)$ e $\vec{v} = (2 \quad -1 \quad 1)$ e de tamanho 3.
3. Encontre um vetor unitário ortogonal a $u = (1 \quad 0 \quad 2)$ e $v = (1 \quad -2 \quad 1)$.

4. Dados os vetores $\vec{u} = (2 \quad 1 \quad 1)$ e $\vec{v} = (1 \quad 0 \quad 2)$, determine a área do paralelogramo definido por eles.
5. Dados os vetores $u = (1 \quad 3 \quad -1)$ e $v = (-1 \quad 0 \quad 1)$, determine a área do triângulo definido por eles.

6. Sendo $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2\sqrt{2}$ e o ângulo entre os vetores $\theta = 45°$, determine $|\vec{u}\wedge\vec{v}|$.

7. Considere o triângulo ABC, definido pelos vetores $\overrightarrow{AB} = (2 \quad 1 \quad 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (1 \quad -1 \quad 0)$, determine:
   a. A área do triângulo.
   b. A altura do triângulo em relação ao lado AB.

8. Dado três pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (1, -1, 0)$. Determine a área do triângulo ABC