Integral – Técnicas de integração

Professor Fiore

Para encontrar a derivada de algumas funções, era usada a regra do produto, a regra do quociente e a regra da cadeia. Da mesma forma, para integrar algumas funções mais elaboradas, precisamos de algumas técnicas adicionais, como a **integral por substituição e integral por partes**.

Integral por substituição – regra geral

Algumas funções podem ser facilmente integradas se substituirmos a “expressão de dentro” por u e ajustamos o diferencial original, conforme o exemplo abaixo. Note que isso só será possível se a parte algébrica da derivada da “função de dentro” estiver multiplicando “por fora”.

Exemplo:

$\int x.cos(x^2+2)\,dx$	Função a ser integrada. Note que a parte algébrica da derivada da “função de dentro”, “aparece fora”.
$\int cos(x^2+2).xdx$	Reescrevendo a função para facilitar a visualização da substituição a ser feita, no caso $u = x^2+2$ e algo no lugar do termo restante xdx.
$u = x^2+2$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{du}{2} = xdx$	Derivando a “função de dentro” e isolando adequadamente para encontrar “o termo de fora”. No caso o substituto de xdx. (Neste momento, se não for possível encontrar o substituto para o termo adicional, é porque este método não é apropriado para esta função)
$\int cos(u).\frac{du}{2}$	A função a ser integrada, escrita com nova variável. Note que um ajuste no diferencial foi necessário para “compensar” a substituição feita.
$\int \frac{1}{2}cos(u)\,du$	Podemos reescrever a função para facilitar na hora de integrar. Neste momento integramos a função.
$\frac{1}{2}sin\,u + c$	A integral da função, que precisa ser “organizada”.
$\frac{sin(x^2+2)}{2} + c$	Voltamos a usar a variável original.

Sempre se lembre de retornar a variável original e fique atento com os sinais na hora de organizar o resultado. Se achar pertinente, encontre a derivada do resultado para confrontar com a função integrada.

1. Encontre as integrais das funções a seguir, substituindo a variável.

a. $\int x\,sin(x^2)dx$

b. $\int xe^{x^2}dx$

c. $\int xcos(x^2)dx$

d. $\int x^2cos(x^3)dx$

e. $\int 6tsin(t^2)dt$

f. $\int xcos(x^2+3)dx$

g. $\int 5ve^{v^2}dv$

h. $\int xe^{4x^2}dx$

i. $\int x^{10}sin(x^{11})dx$

2. Aplique o método nos casos a seguir.

a. $\int \frac{x}{x^2-3}dx$

b. $\int t.(t^2-1)^5\,dt$

c. $\int (3z+4)^6\,dz$

d. $\int e^{sin\,x}.cos\,x\,dx$

e. $\int \frac{x}{(x^2-3)^5}dx$

f. $\int \frac{-1}{7x-1}dx$

3. Resolva a integral a seguir $\int -t.(t^2-2)\,dt$ por substituição, em seguida resolva a integral novamente, mas simplifique-a antes de integrar. Confira os resultados. (Considere que, $c_1 - 1 = c_2$)

4. Mostre que a integral de $\int \sqrt{x}dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c$ e use esse resultado para encontrar as integrais abaixo.

a. $\int x.\sqrt{3x^2}dx$ b. $\int \sqrt{2x+1}\,dx$ c. $\int x^2.\sqrt{4x^3-2}\,dx$

5. Um dos casos anteriores podia ser simplificado antes de integrar, a saber $\int x.\sqrt{3x^2}dx$. simplifique a função integre novamente e compare o resultado para ver se você simplificou adequadamente a resposta da atividade anterior.

6. Calcule a integral $\int \tan x\,dx$, para isso lembre-se que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ e diga que $u = \cos x$.

Integral por substituição - simplificada

Quando a “função de dentro” for um polinômio de primeiro grau ($ax + b$), ao aplicar a substituição na integral ela segue um padrão simples, basta integrar a função f em relação ao polinômio e multiplicar por $\frac{1}{a}$.

$$\int f(ax+b)\,dx = \int f(u)\frac{du}{a} = \frac{F(u)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c$$

Exemplo:

$\int e^{3x+1}\,dx$	Função a ser integrada
$u = 3x + 1$	Identificamos a “função de dentro” e chamamos de u.
$\frac{du}{dx} = 3\ \ onde\ \frac{du}{3} = dx$	Após derivar note que $dx = \frac{du}{a}$, no caso $dx = \frac{du}{3}$.
$\int e^u \frac{du}{3} = \int \frac{1}{3}e^u du$	Função a ser integrada, após a substituição da “função de dentro”.
$\frac{e^u}{3} + c = \frac{e^{3x+1}}{3} + c$	Derivada e resposta final. Lembre-se que $\int e^x dx = e^x + c$ e no final temos de retornar a variável original

7. Quando a “função de dentro” for de primeiro grau, no formato $ax + b$ ou ax com a e b números reais, é possível resolver a integral diretamente. Para ‘descobrir’ o padrão resolva as atividades a seguir.

a. $\int e^{3x}\,dx$
b. $\int e^{5x}\,dx$
c. $\int e^{-2x}\,dx$
d. $\int e^{4x+5}\,dx$
e. $\int sin(2x)dx$
f. $\int sin(7x)dx$
g. $\int sin(-5x)dx$
h. $\int sin(8x-3)dx$
i. $\int cos(9x)\,dx$
j. $\int cos(11x)\,dx$
k. $\int cos(-3x)\,dx$
l. $\int cos(x+2)\,dx$
m. $\int e^{3x-2}dx$
n. $\int -e^{3x-5}dx$
o. $\int -e^{-7x}dx$
p. $\int \cos(3x)dx$
q. $\int -\cos(3x)dx$
r. $\int -\cos(-4x)dx$
s. $\int -\text{sen}\,(3x)dx$
t. $\int -\text{sen}\,(-2x)dx$

8. Com um pouco mais de cuidado, resolva direto as integrais abaixo.

a. $\int (2x-4)^{13}dx$
b. $\int (-5x+2)^6 dx$
c. $\int (3x+3)^{21}dx$
d. $\int (3-x)^9 dx$
e. $\int (-x+2)^{-5}dx$
f. $\int \frac{1}{(3x-2)^{21}}dx$
g. $\int \frac{1}{x-3}dx$
h. $\int \frac{1}{-2x+1}dx$
i. $\int \frac{3}{5x-2}dx$
j. $\int \frac{7}{5x+3}dx$
k. $\int \frac{-5}{x-2}dx$
l. $\int \sqrt{3x+2}dx$
m. $\int \sqrt{x+3}dx$
n. $\int -\sqrt{5x-2}dx$
o. $\int \sqrt{2-2x}dx$
p. $\int -\sqrt{-x+2}dx$

9. Analisando o padrão da atividade anterior e considerando a, b e n números quaisquer, encontre as integrais a seguir.

a. $\int e^{ax}\,dx$
b. $\int sin(ax)dx$
c. $\int cos(ax)\,dx$
d. $\int e^{ax+b}\,dx$
e. $\int (ax+b)^n dx$
f. $\int \frac{1}{ax+b}dx$

10. Confira os resultados usando um aplicativo ou o site wolframalpha.com.