Integral definida e integral de Riemann

Professor Fiore

Se f for uma função continua e definida em um intervalo $a \leq x \leq b$, então a integral definida é apresentada abaixo, onde F é qualquer primitiva de f.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1. Calcule as integrais definidas abaixo.

$$\int_0^3 (x^2+4)dx \qquad \int_1^4 (-x^2-3x)dx \qquad \int_1^4 (x-2)(x+1)dx \qquad \int_0^2 (x^5+4x^3+2)dx$$

Integral de Riemann – Cálculo de área

A área entre a curva de uma função e o eixo das abscissas (eixo horizontal x) pode ser estimada pela soma de n retângulos cujas alturas são dadas pela função nos pontos amostrais $f(x_i^*)$ e a largura é dada por Δx. Em termos matemáticos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}[f(x_i^*).\Delta x] \quad = \quad \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*).\Delta x + f(x_2^*).\Delta x + \ldots + f(x_n^*).\Delta x]$$

Para uma função f, continua e definida em um intervalo $a \leq x \leq b$ temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}[f(x_i^*).\Delta x] \quad = \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

Assim podemos usar a integral definida para calcular a área entre a curva e o eixo.

Atenção: Quando o valor $f(x_i^*) > 0$, o valor encontrado é positivo e para $f(x_i^*) < 0$, o valor encontrado é negativo. Para intervalos onde houver mudança de sinal no intervalo $a \leq x \leq b$, se o objetivo for encontrar as áreas entre a curva e o eixo, é necessário calcular a integral definida 'pedaço por pedaço', a cada mudança de sinal.

2. Dada a função $y = 2x + 3$ determine a área entre o gráfico e as retas $x = 1$ e $x = 3$. Desenhe o gráfico e compare os resultados.
3. Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x$, calcule as integrais definidas abaixo e responda.

$$\int_{-2}^0 (x^2-2x)dx \qquad \int_0^2 (x^2-2x)dx \qquad \int_{-2}^2 (x^2-2x)dx$$

a. Qual a área delimitada pela função $y = x^2 - 2x$, no intervalo $-2 \leq x \leq 0$?
b. Qual o valor da integral definida $\int_0^2 (x^2-2x)dx$?
c. Qual a área para a função no intervalo $0 \leq x \leq 2$? Por que a integral resulta num valor negativo?
d. Por que a área tem de ser positiva?
e. Qual a área delimitada pelo gráfico no intervalo $-2 \leq x \leq 2$?
f. Porque a integral $\int_{-2}^2 (x^2-2x)dx$ não resultou no valor das áreas delimitadas entre a função e o eixo das abscissas?

4. Determine a área entre a curva $y = x^2$ e o eixo das abscissas, entre as retas $x = 2$ e $x = 4$.

5. Determine a área delimitada pela curva $y = -x^2 + 4$ e o eixo das abscissas. (Dica: primeiro esboce o gráfico, encontre os pontos em que o gráfico cruza o eixo x e monte a integral definida para determinar a área)

6. Para cada integral definida abaixo, esboce o gráfico, calcule a integral definida e indique a área no gráfico.

a. $\int_0^3 (3x+1)dx$
b. $\int_0^3 3(x+1)dx$
c. $\int_1^3 (x^2+2x-3)dx$
d. $\int_{-2}^0 (x^2+2x-3)dx$
e. $\int_{-1}^2 (x-2)(x+1)dx$
f. $\int_{-1}^2 (x+1)(x-3)dx$

7. Esboce o gráfico da função $f(x)=x^2+4$, calcule as integrais definidas abaixo e explique os valores no gráfico.

a. $\int_0^2 (x^2+4)dx$
b. $\int_{-2}^0 (x^2+4)dx$
c. $\int_{-2}^2 (x^2+4)dx$

8. Para os casos abaixo onde o a função corta o eixo das abscissas calcule as integrais definidas. (Note, apenas calcule)

a. $\int_{-1}^2 (x+2)(x-1)dx$
b. $\int_0^3 (x-2)(x+1)dx$
c. $\int_0^3 (x^2+2x-3)dx$

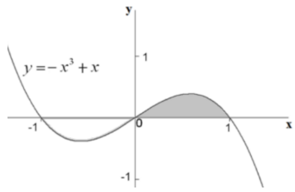
9. Agora para os mesmos casos da atividade anterior, esboce o gráfico, encontre o local que a função corta o eixo das abscissas no intervalo dado e determine a área total entre a curva e o eixo das abscissas.

a. $\int_{-1}^2 (x+2)(x-1)dx$
b. $\int_0^3 (x-2)(x+1)dx$
c. $\int_0^3 (x^2+2x-3)dx$

10. Determine a área delimitada pela curva $y=x^2-9$ e o eixo das abscissas.
11. Determine a área delimitada pela curva $y=-x^2+1$ e o eixo das abscissas.

Abaixo há casos envolvendo outras funções, esboce os gráficos usando um programa ou pesquise como fazê-lo.

12. Determine a área delimitada pela curva da função $y=sin\,x$, no intervalo de zero a pi. Para isso esboce o gráfico, determine a integral definida e calcule.
13. Determine a área delimitada pela curva da função $y=cos\,x$, no intervalo de zero a pi. Para isso esboce o gráfico, determine as integrais definidas necessárias e calcule.
14. Qual a área entre a função $f(x)=\frac{1}{x}$ o eixo das abscissas no intervalo de $x=1$ a $x=e$?
15. Esboce o gráfico da curva $y=e^x$ e determine a área entre a curva, o eixo das abscissas e as retas $x=0$ e $x=2$.
16. Qual a área delimitada pela curva $y=e^x$ e o eixo das abscissas, a direita da reta $x=0$? (Dica considere como intervalo $[-\infty,0]$.
17. Use a ideia de integral para determinar a área sombreada na figura ao lado, sendo a função $y=-x^3+x$.



Dicas adicionais:

- Para conferir os resultados acesse o site http://www.wolframalpha.com/ e digite a integral desejada, por exemplo, para encontrar o valor de $\int_{-2}^1 (x^2-4)\,dx$ digite 'integrate (x^2-4), -2 to 1' no site.
- Apesar da maioria das atividades falar sobre a área entre a curva e o eixo das abscissas, a integral definida pode ser usada em outras aplicações.
- Quando necessário esboçar gráficos, use os valores da integral definida, além das dicas abaixo.
- Para esboçar retas precisamos de dois pontos distintos, os melhores são os que cortam os eixos.
- Para esboçar parábolas, encontre o x do vértice (derive a função e iguale a zero) e use vizinhos dele. Também busque as raízes (y=0) se houver.
- Note que facilmente encontramos as raízes de funções no formato $y=(x+a)(x+b)$.

Alguns resultados interessantes das atividades acima gerados no site wolframalpha.com.

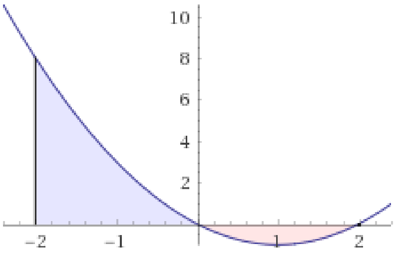
1. Respostas

$\int_0^3 (x^2+4)\,dx = 21$ $\int_1^4 (-x^2-3x)\,dx = -\frac{87}{2} = -43.5$ $\int_1^4 (x-2)(x+1)\,dx = \frac{15}{2} \approx 7.5000$ $\int_0^2 (x^5+4x^3+2)\,dx = \frac{92}{3} \approx 30.667$

2. Resposta

$$\int_1^3 (2x+3)\,dx = 14$$

3. Respostas



$$\int_{-2}^0 (x^2-2x)\,dx = \frac{20}{3} \approx 6.6667$$

$$\int_0^2 (x^2-2x)\,dx = -\frac{4}{3} \approx -1.3333$$

$$\int_{-2}^2 (x^2-2x)\,dx = \frac{16}{3} \approx 5.3333$$

Área = 8 ua, pois somamos as áreas anteriores ajustando o sinal quando a função é negativa.

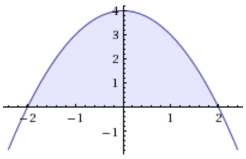
4. Resposta

$$\int_2^4 x^2\,dx = \frac{56}{3} \approx 18.667$$

5. Resposta

Primeiro encontre os pontos que contam o eixo das abscissas.

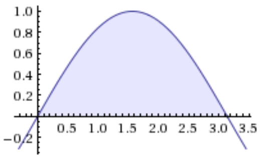
$$\int_{-2}^2 (-x^2+4)\,dx = \frac{32}{3} \approx 10.667$$



Atividades envolvendo outras funções

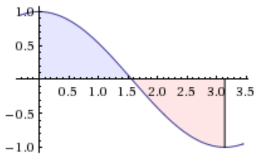
12. Resposta

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = 2$$



13. Resposta

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = 1 \qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,dx = -1$$



14. Resposta $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$

15. Resposta $\int_0^2 e^x\,dx = e^2 - 1 \approx 6.3891$

16. Resposta $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = 1$

17. Resposta $\int_0^1 (-x^3+x)\,dx = \frac{1}{4} = 0.25$