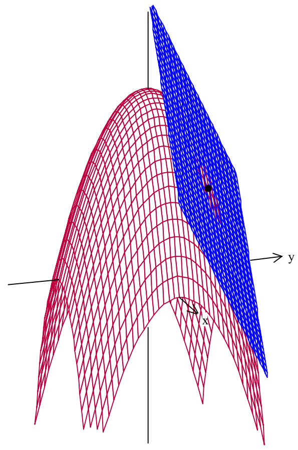
Equação do plano tangente

Professor Fiore

A equação geral que permite encontrar a equação do plano tangente a um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ pertencente a uma superfície de uma função de duas variáveis independentes $z = f(x, y)$ é dada por:



$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0).(x - x_0) + f_y(x_0, y_0).(y - y_0)$$

1. Determine a equação do plano tangente à superfície das curvas dada no ponto dado.
    a. $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4$, $P(1,1,?)$
    b. $f(x, y) = 4x^2 + y^3 - x$, $P(2, -2,6)$
    c. $f(x, y) = y\, ln\, x$, $P(e, 3, ?)$
    d. $f(x, y) = y\, cos(x + y)$, $P(1, -1, ?)$
    e. $f(x, y) = e^{x^2 - y}$, $P(1,1, ?)$
    f. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $P(1, 1, ?)$

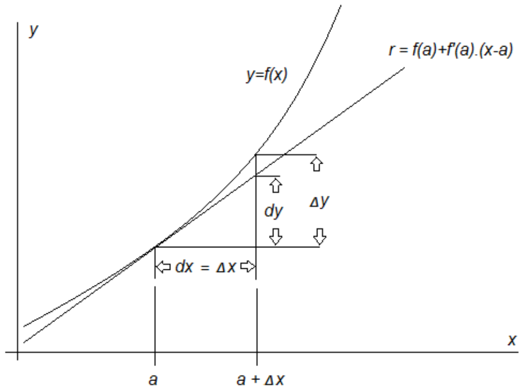
Observe que o ponto (x_0, y_0) pertence ao domínio da função e $z_0 = f(x_0, y_0)$ é a imagem do ponto. Assim o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ pertence simultaneamente a superfície da função e ao plano tangente ao ponto.

Diferencial em funções de uma variável

Para uma função de uma variável $y = f(x)$, podemos definir o diferencial dx como uma variável independente. Neste caso o diferencial dy pode ser definida do como:

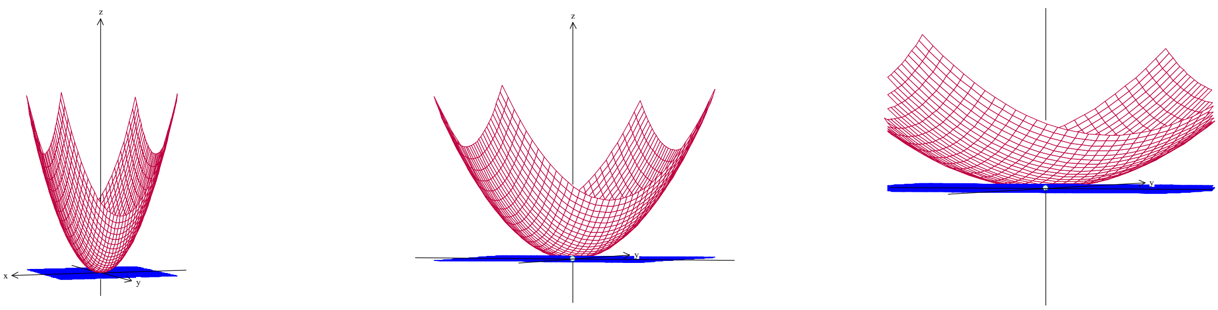
$$dy = f'(x)dx$$

Isto vale quando a função for diferenciável no ponto e uma função $f(x)$ é diferenciável em um ponto a se $\Delta y = f'(a).\Delta x + \varepsilon.\Delta x$, onde $\varepsilon \to 0$, quando $\Delta x \to 0$.



Aproximação linear

Na situação abaixo temos o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$ e o plano tangente ao ponto $P(0,0,0)$, cada figura representa um zoom no ponto.



Conforme se aproxima do ponto de tangência, os pontos do gráfico mostram-se cada vez mais próximos do plano tangente. Consequentemente pode-se dizer que a equação do plano tangente é uma boa aproximação linear da função $f(x, y)$. Esta ideia nos ajuda a entender quando uma função de duas variáveis é diferenciável em um ponto.

Uma função de duas variáveis é diferenciável em um ponto (a, b) se Δz puder ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b).\Delta x + f_y(a, b).\Delta y + \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y$$

Onde ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0\,,0)$

Convenientemente podemos considerar uma função diferenciável em um ponto se as derivadas parciais existirem perto do ponto e forem contínuas. E quando isso ocorre podemos usar o diferencial dz para estimar a variação em z, nas proximidades de pontos (x, y).

Diferenciais em funções de duas variáveis

Dada a função $f(x,y) = x^2 + 2xy$ no ponto (1; 3), determine quanto a variável dependente z varia 'na direção' do ponto próximo (1,1; 3,2)?

Usando os conceitos citados, podemos estimar a variação em z, por meio das derivadas parciais e considerando que dx = 0,1 e dy = 0,2, valores relativamente próximos a zero, que correspondem o quanto variou as variáveis independentes.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$
$$dz = (2x + 2y)dx + 2xdy$$
$$dz = (2.1 + 2.3).0{,}1 + 2.1.0{,}2$$
$$dz = 0{,}8 + 0{,}4 = 1{,}2$$

Note que dz está muito próximo de Δz, a variação real em z com as mudanças das coordenadas.

$$\Delta z = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f(1{,}1 \quad 3{,}2) - f(1 \quad 3) = 8{,}25 - 7 = 1{,}25$$

Assim é possível dizer que o diferencial dz estima bem a variação ao redor do ponto e como aplicação, é possível usar o diferencial dz para encontrar o 'erro' de medidas quando sofrem pequenas variações e estimar variações em situações complexas sem uso de calculadora.

1. O raio de um cilindro tem 10 cm e a altura dele é de 20 cm. Considerando que essas medidas podem variar um pouco, 0,1 cm, use o diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume. ($50\pi\ cm^3$)

2. Uma empresa usa copos em forma de cones, para causar uma impressão de volume e reduzir a quantidade de produto vendida. Supondo que os cones usados tenham um raio de 4 cm e altura 16 cm. Qual a variação na quantidade de produto vendido sabendo que a medida do raio varia em 0,1 cm e da altura em 0,3 cm?

3. Dada a função $z = y^2 + lnx$ no ponto $(10, 3)$, estime quanto a variável z aumenta (ou diminui) quando os valores do ponto aumentam 0,01. (Resultado 0,061, próximo do real 0,0610995...)

4. As dimensões de uma caixa retangular fechada são 30 cm, 40 cm e 60 cm, considerado que o erro máximo para cada dimensão seja 0,3 cm, determine usando diferencial:
   a. O erro máximo no volume.
   b. O erro máximo na área da superfície.

   Dica: considere $dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$