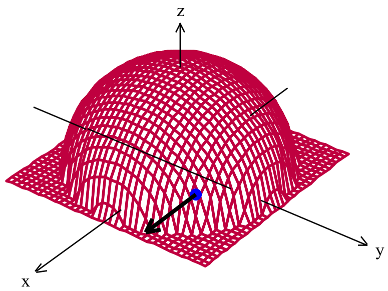
Derivada direcional

Professor Fiore

Para uma função diferenciável de duas variáveis definida por $z = f(x, y)$, a derivada parcial em relação a x, indica a taxa de mudança da variável dependente z na direção do eixo x. Semelhantemente a derivada parcial em relação a y, indica a taxa de variação da variável dependente z na direção do eixo y.



Para entender o significado geométrico das derivadas parciais, considere o que ocorre na superfície gerada pela equação da meia esfera $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, no ponto $P = (2, 2, 1)$ pertencente a ela. Pela figura é possível ver que, se deslocarmos o ponto P na direção do eixo x, indicada por um vetor, a superfície decresce, pois o valor da variável dependente z diminui nesta direção. Sendo assim pode-se dizer que, quando a taxa de variação da variável dependente for negativa, a superfície 'decresce' e quando a taxa de variação for maior que zero a superfície 'cresce', na direção dada a partir do ponto usado.

Exemplo 1 - Calcule a variação de z na direção do eixo x para a função $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ no ponto pertencente ao domínio $P = (2, 2)$, indicada na figura anterior.

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \rightarrow \qquad f_x = -2x.\frac{1}{2\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

$$f_x(2, 2) = \frac{-2}{\sqrt{9 - 2^2 - 2^2}} = -2$$

Coerentemente com a explicação, o valor a taxa de variação da variável dependente z na direção do eixo x é negativo e conforme a figura, a superfície 'decresce' nesta direção.

Derivada direcional

A derivada direcional de uma função diferenciável $f(x, y)$ nos indica a taxa de variação da variável dependente z na direção do versor $u = (a, b)$, e é indicada por $D_u f(x, y) = f_x(x, y).a + f_y(x, y).b$

Caso queira calcular a derivada direcional em um ponto específico, $P = (x_0, y_0)$, substitua as coordenadas do ponto nas derivadas parciais. Assim você encontra um número que indica duas coisas, a taxa de variação da variável dependente z na direção e a inclinação do plano tangente ao ponto na direção dada pelo versor.

Exemplo 2 – Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = x^2y^3$ no ponto $P = (1, 1)$ na direção do vetor $v = (-3, 4)$.

1º Determine o versor do vetor dado, $\frac{v}{|v|} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

2º Encontre as derivadas parciais, $f_x = 2xy^3$ e $f_y = 3x^2y^2$

3º Calcule a derivada direcional no ponto dado,

$$D_v f(x, y) = f_x(x, y).a + f_y(x, y).b$$

$$D_v f(x, y) = 2xy^3.\left(\frac{-3}{5}\right) + 3x^2y^2.\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$D_v f(1, 1) = 2.1.1^3.\frac{(-3)}{5} + 3.1^2.1^2.\frac{4}{5} = \frac{-6}{5} + \frac{12}{5} = \frac{6}{5}$$

Neste caso, o valor da taxa de variação foi positivo, ou seja, para a função do problema na direção dada a partir do ponto estudado, o valor de z vai aumentar e a superfície vai 'subir'.

Assim para calcular a derivada direcional de uma função em uma determinada direção precisamos das derivadas parciais e de um versor que indica a direção e o sentido da derivada direcional.

Quando calculamos ela em um ponto, encontramos um número que indica se a variável dependente z aumenta, diminui ou se mantem, a partir do ponto na direção do versor. Se a derivada direcional for maior que zero, a função ‘cresce’ na direção, ou seja, a variável dependente z aumenta. Caso a derivada direcional no ponto seja negativa, a função ‘decresce’ na direção, ou seja, a variável dependente z diminui na direção dada. E por fim, se a derivada direcional for zero, significa que a partir do ponto usado, na direção estudada sob a superfície a variável dependente z não muda, isso ocorre em alguns pontos.

Atividades

1. Considere que um inseto esteja sobre a superfície gerada pela função $f(x,y) = 2x^3y + x^2$ no ponto $P = (1,2)$ e caminha na direção do vetor $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ é possível afirmar que:

a. O inseto irá subir na superfície
b. O inseto irá descer na superfície.
c. O inseto não irá subir nem descer.

2. Determine a derivada direcional da função $f(x,y) = xy - \ln(x)$ no ponto $P = (1,-1)$ na direção que vai do ponto $A = (2,1)$ ao ponto $B = (1,-2)$.
3. Calcule a derivada direcional da função $f(x,y) = y - \sin(xy)$ no ponto $P = (\pi, 0)$ na direção que forma ângulo de 45° em relação ao eixo x.

Ideias básicas

4. As funções de duas variáveis geram superfícies e as derivadas parciais mostram os comportamentos dessas superfícies. A derivada parcial em relação a x, mostra a variação de z com mudanças na direção do eixo x.
   Dada a função $z = x^3y^2$ determine a variação em z a partir do ponto $P = (2,-3)$, na direção do eixo x.
5. As funções de duas variáveis geram superfícies e as derivadas parciais mostram os comportamentos dessas superfícies. A derivada parcial em relação a y, mostra a variação de z com mudanças na direção do eixo y.
   Dada a função $z = x^3 + y^2$ determine a variação em z a partir do ponto $P = (1,-2)$, na direção do eixo y.

Derivadas direcionais

6. Determine a derivada direcional da função $f(x,y) = xy^3 + 3x$ no ponto $P = (2,0)$ na direção do vetor $v = (-1,3)$.
7. Encontre a derivada direcional da função $f(x,y) = \ln(x^2 + y^3)$ no ponto $P = (1,1)$ na direção do vetor $v = (-3,4)$.
8. Determine a derivada direcional da função $f(x,y) = \cos(x^2 + y)$ no ponto $P = (0,\pi)$ na direção do vetor $v = (1,2)$.
9. Encontre a derivada direcional da função $f(x,y) = xln(y)$ no ponto $P(1,e)$ na direção do vetor $\vec{u} = -2i + 1j$.

10. Considere a superfície gerada pela função $f(x,y) = x^3y^2$, se uma pessoa sob essa superfície andar a partir do ponto $P(-1,3)$ na direção do vetor que forma 30° em relação ao eixo x, qual inclinação ela irá enfrentar?

Gabarito parcial

1. A derivada direcional no ponto é 10, isso indica que o inseto irá enfrentar uma subida.
2. A derivada direcional vale $-\frac{\sqrt{10}}{10}$
3. A derivada direcional vale $\frac{\sqrt{2}-\pi\sqrt{2}}{2}$