Vetor gradiente

Professor Fiore

Se $f(x, y)$ for uma função diferenciável, chamamos de gradiente de f a função vetorial dada por:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j \quad \text{ou} \quad \nabla f(x, y) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle$$

Exemplo 1 – Determine o gradiente da função $f(x, y) = \ln(x^2 + y^3)$ no ponto $P = (1, 1)$

1º Encontre as derivadas parciais, $f_x = 2x . \frac{1}{x^2+y^3} = \frac{2x}{x^2+y^3}$ e $f_y = 3y^2 . \frac{1}{x^2+y^3} = \frac{3y^2}{x^2+y^3}$

2º Calcule o vetor gradiente para o ponto, usando uma das escritas possíveis,

$$\nabla f(x, y) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle \qquad \nabla f(x, y) = \langle \frac{2x}{x^2+y^3}, \frac{3y^2}{x^2+y^3} \rangle \qquad \nabla f(1,1) = \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$$

Propriedades relevantes sobre vetor gradiente.

1 – Ele nos indica a direção e o sentido da máxima taxa de variação em uma função. E seu oposto nos dará a direção e o sentido da mínima taxa de variação.

2 – O tamanho do vetor gradiente nos dá a máxima taxa de variação da função no ponto.

3 – A derivada direcional na direção de um versor u pode ser dada pelo produto escalar entre o vetor gradiente e o versor u, a saber $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) . u$.

Atenção, sempre analise o contexto para encontrar a direção da derivada direcional e se certifique de ter o versor da direção desejada.

Exemplo 2 – Dada a função $f(x, y) = x^2 y + 5y^3$, encontre o vetor que indica a direção e o sentido de máxima taxa de variação a partir do ponto $P = (2, -1)$.

Resolução: O gradiente nos dá o vetor que indica a direção e o sentido de máxima taxa de variação, portanto encontre o gradiente usando as derivadas parciais, $\nabla f(x, y) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle = \langle 2xy, x^2 + 15y^2 \rangle$ e substitua as coordenadas do ponto dado, $\nabla f(2, -1) = \langle -4, 19 \rangle$.

Exemplo 3 – Dada a mesma função da atividade anterior $f(x, y) = x^2 y + 5y^3$, no mesmo ponto $P = (2, -1)$, determine a máxima taxa de variação possível.

Resolução: O tamanho do gradiente nos dá a máxima taxa de variação, portanto, calcule o tamanho do vetor gradiente $|\nabla f(2, -1)| = \sqrt{(-4)^2 + 19^2} = \sqrt{377}$

Exemplo 4 – Dada a mesma função da atividade anterior $f(x, y) = x^2 y + 5y^3$, no mesmo ponto $P = (2, -1)$, encontre a derivada direcional na direção do vetor $u = i + 2j$, usando o gradiente.

Resolução: Basta calcular o produto escalar entre o vetor gradiente no ponto e o versor do vetor da direção.

1º Determine o versor do vetor dado $\frac{u}{|u|} = \langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \rangle = \langle \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \rangle$

2º Calcule o produto escalar $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) . u$

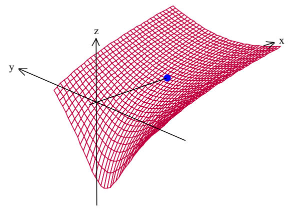
$$D_u f(2, -1) = \langle -4, 19 \rangle . \langle \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \rangle$$

$$D_u f(2, -1) = \frac{-4\sqrt{5}}{5} + \frac{38\sqrt{5}}{5} = \frac{34\sqrt{5}}{5}$$

Se o vetor gradiente em um ponto for o vetor nulo, precisamos analisar a situação com mais cautela e esses detalhes fogem dessa aula. Mas vale considerar que talvez o ponto em questão seja um máximo ou um mínimo local da função, ou ainda um ponto de sela.

Atividades

1. Determine o vetor gradiente da função $f(x,y) = \ln(x + y^2)$ no ponto $P = (1,0)$, representado na figura e responda.
   a. Qual direção temos a máxima taxa de variação?
   b. Qual a taxa máxima de variação?
   c. Em qual direção a bolinha no ponto P irá rolar?



2. Considere que em certa região, o potencial elétrico V seja estimado pela função $V(x,y,z) = 3x^2 + 2xy - xyz$.
   a. Qual a taxa de variação do potencial no ponto $P = (2,3,-1)$, na direção $\vec{v} = i - 2j + 2k$?
   b. Em que direção o potencial varia mais rapidamente em P?
   c. Qual a taxa máxima de variação em P?
3. Considere a superfície gerada pela equação $z = \sin(x + y)$. Se uma bolinha for solta acima da superfície no ponto $P = (0, -\pi)$, em qual direção ele inicia o movimento?

Atividades propostas

4. Determine o gradiente da função $f(x,y) = xe^{xy}$ no ponto $P = (2,0)$ e use ele para encontrar a derivada direcional na direção do vetor que forma 45° com o eixo x.
5. Determine o vetor gradiente da função $z = x^2 - 3y$ no ponto $P = (3,-1)$.
6. Considere a superfície gerada pela equação $z = x^3 + 4y$. A partir do ponto $P = (1,-2)$. Qual vetor indica a direção de máxima taxa de variação de z?
7. Considere a superfície gerada pela equação $z = \cos(xy)$. A partir do ponto $P = (1,\pi)$. Qual vetor indica a direção de máxima taxa de variação de z?
8. Dada a função $z = 3xy^3 - x^2$, no ponto $P = (2,-1)$ determine a máxima taxa de variação em z e a direção em que isso ocorre.
9. Dada a função $z = \frac{1}{xy}$, no ponto $P = (1,-1)$ determine a máxima taxa de variação em z e a direção em que isso ocorre.
10. Considerando a função $f(x,y) = e^{-2x} sen(y)$

a. Determine o vetor gradiente da função, para o ponto $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$

b. Qual o valor máximo de crescimento da função no ponto $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$?

c. O valor da derivada direcional na direção do $\vec{u} = -6\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$ no ponto $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$é:

   a. $\frac{-3+\sqrt{3}}{5}$ b. $\frac{2+3\sqrt{3}}{5}$ c. $\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$ d. $\frac{3+2\sqrt{3}}{5}$ e. $\frac{5+4\sqrt{3}}{2}$

11. Prove que o vetor gradiente nos indica a direção e sentido de máxima taxa de variação.
12. Prove que o tamanho de vetor gradiente indica a máxima taxa de variação.

Gabarito parcial

1. a) $\nabla f(1,0) = \langle 1,0 \rangle$; b) $|\nabla f(1,0)| = 1$; c) $-\nabla f(1,0) = \langle -1,0 \rangle$
2. a) $D_u(2,3,-1) = -1$; b) $\nabla V(2,3,-1) = \langle 21,6,-6 \rangle$; c) $|\nabla f(2,3,-1)| = \sqrt{513} = 3\sqrt{57}$
3. $-\nabla f(0,\pi) = \langle 1,1 \rangle$

10. a) $\nabla f(x,y) = \langle -2e^{-2x}\sin y, e^{-2x}\cos y \rangle$ no ponto $\nabla f\left(0,\frac{\pi}{6}\right) = \langle -1, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$; b) $\left|\nabla f\left(0,\frac{\pi}{6}\right)\right| = \sqrt{7}/2$; c) alternativa d