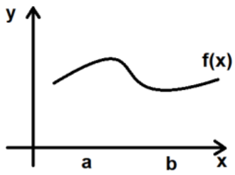
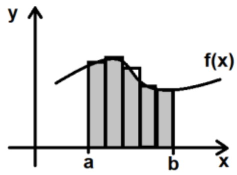
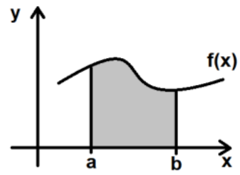
Integral dupla sobre região retangular

Professor Fiore

Em cálculo de função de uma variável você aprendeu como calcular a integral definida em um intervalo $a \le x \le b$. Para o caso especial onde $f(x) \ge 0$, a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas dos retângulos e a integral definida representará a área sob a curva no intervalo dado.

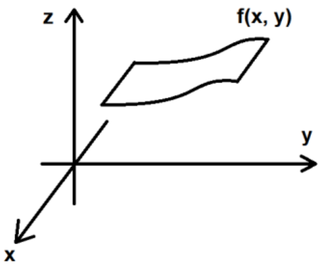


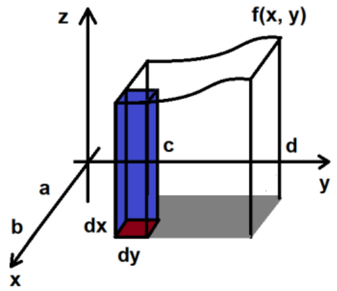


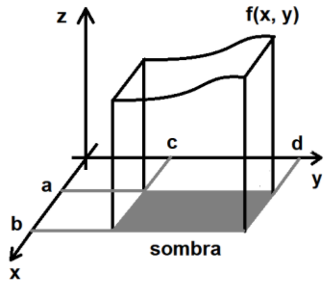


$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

No caso das funções de duas variáveis algo semelhante ocorre. Quando a função de duas variáveis $f(x,y) \ge 0$ em um intervalo retangular $R = \{(x,y) \in R^2 |\ a \le x \le b, c \le y \le d\} = [a,b] \times [c,d]$, o valor da integral dupla sob a área retangular nos dá o volume do sólido acima da região retangular e abaixo do gráfico da função.







As figuras mostram o desenvolvimento da ideia. Imagine que exista muitos paralelepípedos com base dA = dx.dy e de altura calculado por um ponto de amostragem dentro da área, dado por $f(x_i, y_i)$. A soma dos volumes de todos os paralelepípedos aproxima ao valor do volume do sólido acima da região retangular e abaixo do gráfico da função.

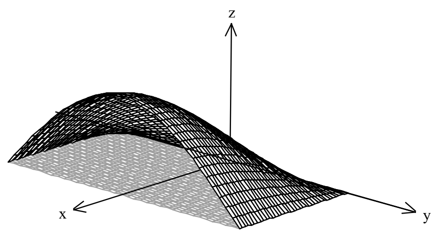
O cálculo de integrais duplas pela definição é demasiadamente complexo para essa aula, mas é possível expressar essa integral dupla como uma integral iterada, definida a seguir.

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \qquad \text{ou} \qquad \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

Exemplo 1 – Determine o valor da integral iterada $\int_0^1 \int_1^3 -4xy\,dydx$.

$$\int_0^1 \int_1^3 -4xy\,dydx = \int_0^1 -2xy^2|_1^3 dx = \int_0^1 [-2x.3^2 - (-2x.1^2)]dx = \int_0^1 -16x\,dx = -8x^2|_0^1 = -8 - (-0) = -8$$

Exemplo 2 - Um teatro público tem o formato de acordo com a figura, sendo o teto formado pela função $z = sin\,x\,.\,cos\,y$, dentro do retângulo $[0,\ {}^{\pi}/_{2}] \times [-{}^{\pi}/_{2},\ {}^{\pi}/_{2}]$ (medidas em decâmetros). Qual o volume coberto pela estrutura em decâmetros cúbicos?



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,.\cos y\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\sin y\,|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x.\sin\frac{\pi}{2} - \sin x.\sin\frac{-\pi}{2}\right) dx =$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,dx = -2\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\cos\frac{\pi}{2} - (-2\cos 0) = 2$ decâmetros cúbicos.

O teorema de Fubini diz que, para uma função $f(x,y)$, contínua no retângulo $R = \{(x,y) \in R^2 | \ a \le x \le b, c \le y \le d\}$ temos:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy$$

Dada as funções contínuas $f(x,y) \le g(x,y)$ com ambas acima do plano xy em um intervalo dado. Para determinar a sólido entre elas em uma região, basta calcular o volume da 'mais alta' e diminuir o volume da 'mais baixa', em relação ao plano xy.

1. Calcule as integrais iteradas abaixo:

a. $\int_0^2 \int_{-1}^2 (8xy^2 - 12x^3)\,dxdy$ b. $\int_1^3 \int_{-2}^0 (6m^2n^2)dmdn$ c. $\int_0^1 \int_1^2 ye^x dydx$

d. $\int_{-1}^2 \int_1^e \frac{y}{x} dxdy$ e. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_1^3 (2r + \sin\theta)drd\theta$ f. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_1^2 (3x^2 . \cos y)dxdy$

2. Calcule as integrais iteradas, para isso use integral por substituição.

a. $\int_0^1 \int_1^3 (u + e^{3v})dudv$ b. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2x + y)\,dxdy$ c. $\int_0^1 \int_0^1 ye^{xy} dxdy$

3. Calcule as integrais iteradas, para isso use integral por partes.

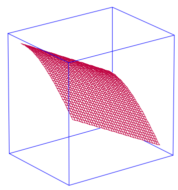
a. $\int_0^1 \int_0^1 (xe^x + y)dxdy$ b. $\int_1^e \int_0^2 (x \ln y)dxdy$

4. Calcule as integrais duplas sobre regiões retangulares.

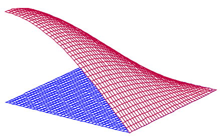
a. $\iint_R (\cos(x + 2y) + 10)dA$, $R = \{(x,y) | 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le {}^{\pi}/_{2}\}$

b. $\iint_R (\sin x + \cos y)dA$, $R = \{(x,y) | 0 \le x \le {}^{\pi}/_{2}, 0 \le y \le \pi\}$

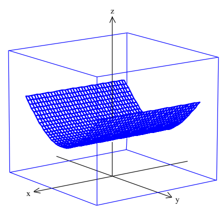
c. $\iint_R (e^x + y)dA$, $[0, \ 1] \times [-1, \ 0]$



5. O gráfico ao lado representa a função $z = \frac{x}{2} + \sin y$, dentro de um paralelepípedo com base $[1, \ 3] \times [{}^{\pi}/_{2}, \ \pi]$. Qual o volume do solido que sobe da base dada até a superfície?



6. Qual o volume do solido abaixo da função $z = \cos x . \sin y$, no quadrado dado por $R = \{(x,y) | 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$?



7. Uma peça com medidas em centímetros, tem o formato baseado na figura ao lado, onde a parte inferior é definida pelo plano xy e a parte superior é definida pela função $f(x,y) = 2 - \cos x$, dentro do retângulo $R = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Determine o volume da peça em cm³.

Para conferir essas e outras integrais use o site http://www.wolframalpha.com.

Por exemplo, para encontrar o valor de $\int_1^e \int_0^2 (x \ln y)dxdy$ digite: "integrate (x*log(y)) dx dy, x=0 to 2, y=1 to e".

Lembrando que neste site usamos log(y) para representar o logaritmo natural ln(y); e para sen (x) escrevemos sin (x).

Gabarito

1. Resultados obtidos no site http://www.wolframalpha.com

$$\int_0^2 \int_{-1}^2 \left(8\,x\,y^2 - 12\,x^3\right) dx\,dy = -58$$

$$\int_1^3 \int_{-2}^0 6\,m^2\,n^2\,dm\,dn = \frac{416}{3} \approx 138.667$$

$$\int_0^1 \int_1^2 y\,e^x\,dy\,dx = \frac{3}{2}\,(e-1) \approx 2.57742$$

$$\int_{-1}^2 \int_1^e \frac{y}{x}\,dx\,dy = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_1^3 (2\,r + \sin(t))\,dr\,dt = 2 + \sqrt{2} + 6\,\pi \approx 22.2638$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_1^2 3\,x^2 \cos(y)\,dx\,dy = \frac{7}{2} = 3.5$$

2. Resultados

$$\int_0^1 \int_1^3 \left(u + e^{3\,v}\right) du\,dv = \frac{2}{3}\left(5 + e^3\right) \approx 16.7237$$

$$\int_0^1 \int_0^1 y\,e^{x\,y}\,dx\,dy = e - 2 \approx 0.718282$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2\,x + y)\,dx\,dy = 0$$

3. Respostas

$$\int_0^1 \int_0^1 (x\,e^x + y)\,dx\,dy = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\int_1^e \int_0^2 x \log(y)\,dx\,dy = 2$$

(Lembre-se que no site http://www.wolframalpha.com log(y) representar o logaritmo natural ln(y))

4. Respostas

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) + \cos(y))\,dx\,dy = \pi \approx 3.14159$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} (\cos(x + 2\,y) + 10)\,dx\,dy = 5\,\pi^2 - 2 \approx 47.348$$

$$\int_{-1}^0 \int_0^1 (e^x + y)\,dx\,dy = e - \frac{3}{2} \approx 1.21828$$

5. $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^3 \left(\frac{x}{2} + \sin(y)\right) dx\,dy = 2 + \pi \approx 5.14159$$

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(y)\,dx\,dy = 1$$

7. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos(x))\,dx\,dy = 2\,(\pi - 1)\,\pi \approx 13.456$$