Introdução a Teoria da probabilidade

Professor Fiore

A palavra probabilidade vem do latim *probare* que indica a ideia de provar ou testar. O primeiro estudo sistemático sobre probabilidade é encontrado no livro “Liber de Ludo Aleae” (Livro do jogo de azar) do médico e matemático italiano Cardano que viveu no século XVI. Posteriormente alguns cálculos são encontrados em cartas trocadas pelos matemáticos Fermat (1601-1665) e Pascal (1623-1662) discutindo probabilidades em jogos de azar.

Hoje a ***teoria da probabilidade***, vai além dos jogos de azar, com ela medimos a *quantidade de incerteza* de um *experimento*, as *chances* de um evento ocorrer.

Para entender bem o conceito, temos de entender o que é ***espaço amostral*** e o que é ***evento***. Chamamos de espaço amostral o conjunto com todas as possíveis ocorrências simples de um experimento e chamamos de evento um subconjunto do espaço amostral; geralmente definimos o evento a partir de uma característica em comum dos elementos que o forma.

Por exemplo, pode-se chamar de experimento o lançamento de um dado, onde o espaço amostral S é formado pelos possíveis resultados. São vários os eventos possíveis, abaixo temos dois exemplos.

Espaço amostral = S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Evento 1 = E_{d1} = {2, 4, 6} = $\{x \in S \mid x \text{ é par}\}$
Evento 2 = E_{d2} = {1, 2, 3, 4} = $\{x \in S \mid x < 5\} = \{x \in S \mid x \leq 4\}$

O lançamento de três moedas é outro exemplo de experimento. Para ele o espaço amostral é definido por todas as combinações possíveis entre cara (A) e coroa (O), usando as três moedas. Este experimento também possui muitos eventos possíveis.

Espeço amostral = S = {AAA, AAO, AOA, OAA, AOO, OAO, OOA, OOO}.
E_{m1} = Obter apenas uma cara ao lançar três moedas = {AOO, OAO, OOA}
E_{m2} = Obter (pelo menos) uma cara ao lançar três moedas = {AAA, AAO, AOA, OAA, AOO, OAO, OOA}
E_{m3} = Obter três valores iguais = {AAA, OOO}

Em um determinado experimento, onde todos os elementos do espaço amostral são equiprováveis, para calcular a probabilidade de um evento [X], observamos o número de elemento do espaço amostral [n(S)], o número de elementos do evento [n(X)] e calculamos a razão entre eles.

$$P(X) = \frac{n(X)}{n(S)}$$

Por exemplo, no caso do experimento “jogar um dado” a probabilidade do evento “um número menor que 5” é dada por:

$$P(E_{d2}) = \frac{n(E_{d2})}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots \approx 66{,}66\%$$

No experimento “jogar três moedas” as chances de obter ao menos uma cara é de:

$$P(E_2) = \frac{n(E_{m2})}{n(S)} = \frac{7}{8} = 0{,}875 = 87{,}5\%$$

Para representar a probabilidade de um evento ocorrer, podemos usar uma fração, um número decimal ou uma porcentagem, esta última é mais comum, mas para valores pequenos a fração é mais adequada. O valor decimal é conveniente em alguns cálculos envolvendo probabilidade.

Algumas características, propriedades e conceitos importantes sobre probabilidade.

- Em qualquer experimento, a probabilidade de um evento qualquer ocorrer, segue:

  $0 \leq P(E) \leq 1$ ou $0\% \leq P(E) \leq 100\%$

- Se a probabilidade de um evento ocorrer for zero (0%), dizemos que o evento é impossível.
- Se a probabilidade de um evento ocorrer for um (100%), dizemos que o evento é certo.
- Se o conjunto dos elementos do evento em estudo contiver apenas um elemento, dizemos que o evento é elementar.

- Dado um experimento e dois eventos distintos, E e E', dizemos que eles são complementares quando a união dos elementos de E e E' coincide com o espaço amostral S e não há nenhum elemento simultaneamente em E e E', ou seja a intersecção deles é vazia.
- Se os eventos forem complementares temos que P(E) + P(E') = 1. Essa propriedade é útil, pois eventualmente conseguimos calcular com mais facilidade a probabilidade do complemento P(E') que a probabilidade do evento P(E) e quando temos um, podemos facilmente determinar o outro.

- Quando a ocorrência de um evento não influência na ocorrência de outro, dizemos que eles são independentes.
  - Para os eventos A e B, independentes, a probabilidade de ocorrer A e B é dada por:

    $$P(A \quad e \quad B) = P(A).P(B)$$

  - Para os eventos A e B, independentes, a probabilidade de ocorrer A ou B, é dada por:

    $$P(A \quad ou \quad B) = P(A) + P(B)$$

- Quando a ocorrência de um evento afeta a ocorrência de outro, dizemos que eles são dependentes.
  - Para os eventos A e B, dependentes, a probabilidade de ocorrer A e B é dada por:

    $$P(A \quad e \quad B) = P(A).P(B|A)$$

  - Para os eventos A e B, dependentes, a probabilidade de ocorrer A ou B, é dada por:

    $$P(A \quad ou \quad B) = P(A) + P(B) - P(A \quad e \quad B)$$

- Quando calculamos a probabilidade de um experimento sem nem mesmo realizar a experiência, chamamos de probabilidade teórica, ou clássica.
- Quando calculamos a probabilidade com uso de estatística, repetindo o experimento algumas vezes, chamamos de probabilidade empírica.
- A lei dos grandes números diz que, quanto maior o número de vezes que realizamos o experimento, tanto mais a probabilidade empírica se aproxima da teórica.
- Eventualmente há a necessidade de usarmos a probabilidade subjetiva, ou *chute*.

Atividades

1. Num sorteio concorrem todos os números inteiros de 1 a 100. Escolhendo-se um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de que o número sorteado tenha dois algarismos, sendo que todos são equiprobabilísticos?

2. Um jogo simples na Mega sena envolve escolher 6 números dentre 60.
   a) Qual a chance de uma pessoa acertar os 6 números sorteados com um jogo simples?
   b) Qual a probabilidade de errar os 6 números selecionados dentre os 60?
   c) Qual a probabilidade de acertar pelo menos um número?
   d) Qual a probabilidade de acertar apenas um dos 6 números?

3. Uma rifa é composta por 100 bilhetes. Sérgio compra 20 bilhetes e Pedro compra 25. Qual a probabilidade de cada um ser sorteado?

4. Uma loja dispõe de 12 geladeiras do mesmo tipo, das quais 4 apresentam um pequeno defeito na pintura.
   a) Se um cliente vai comprar uma geladeira, qual a probabilidade de levar uma defeituosa?
   b) Se um cliente vai comprar duas geladeiras, qual a probabilidade de levar duas defeituosas?
   c) Se um cliente vai comprar duas geladeiras, qual a probabilidade de levar pelo menos uma defeituosa?

5. Retirando-se, ao acaso, uma carta de baralho comum de 52 cartas, qual é a probabilidade de obter-se uma dama ou um rei?

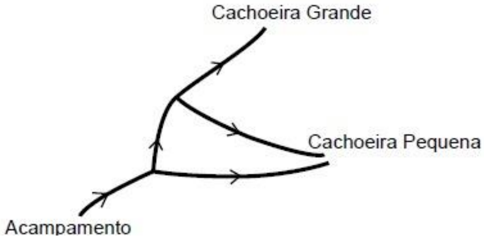
6. (PUC-SP 2010) Um aluno prestou vestibular em apenas duas Universidades. Suponha que, em uma delas, a probabilidade de que ele seja aprovado é de 30%, enquanto na outra, pelo fato de a prova ter sido mais fácil, a probabilidade de sua aprovação sobe para 40%. Nessas condições, a probabilidade deque esse aluno seja aprovado em pelo menos uma dessas Universidades é de:
   a. 70% b. 68% c. 60% d. 58% e. 52%

7. Quatro moedas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de ocorrer coroa em uma só moeda?
   a. 1/8 b. 2/9 c. 1/4 d. 1/3 e. 3/8

8. (PUC-RIO 2009) Jogamos dois dados comuns. Qual a probabilidade de que o total de pontos seja igual a 10?
   a. 1/12 b. 1/11 c. 1/10 d. 2/23 e. 1/6

9. (PUC-RIO 2008) A probabilidade de um casal com quatro filhos ter dois do sexo masculino e dois do sexo feminino é: (considere que a probabilidade de cada filho ser do sexo masculino ou feminino seja a mesma)
   a. 60% b. 50% c. 45% d. 37,5% e. 25%

10. Dois jovens partiram, do acampamento em que estavam, em direção à Cachoeira Grande e à Cachoeira Pequena, localizadas na região, seguindo a trilha indicada neste esquema:



    Em cada bifurcação encontrada na trilha, eles escolhiam, com igual probabilidade, qualquer um dos caminhos e seguiam adiante. Então, é CORRETO afirmar que a probabilidade de eles chegarem à Cachoeira Pequena é:
    a. 1/2 b. 2/3 c. 3/4 d. 5/6

Desafios.

1. Em um programa de TV, o entrevistado precisa escolher uma dentre três portas. Após a escolha o apresentado, que sabe onde o prêmio está, sempre abre uma porta vazia e pergunta se o entrevistado quer trocar de porta. O que deve ser feito neste caso? É ou não vantajoso trocar de porta?

2. Três pessoas participarão de um ‘truelo’, onde os três atirarão, um de cada vez, até que apenas um sobreviva. O atirador A acerta 100% dos tiros, o atirador B acerta 50% dos tiros e você acerta 1 em cada 3. Em função da habilidade, você pode dar o primeiro tiro, depois o atirador B e por fim, o atirador A. Qual a melhor forma de você começar o ‘truelo’? Apontar no atirador A? no B?

3. Um rapaz tem duas namoradas, todo dia ele vai de trem visitar um, ou outra. O trem que vai para casa da namorada A sai de 10 em 10 minutos e o trem que vai para casa da namorada B também sai de 10 em 10 minutos. Sendo assim o rapaz pega o primeiro trem que passa. Após um mês a namorada A termina o com ele, pois eles si viram apenas 3 vezes. Como isso é possível?

Apêndice

Abaixo há algumas situações simples que nos ajudam a recordar alguns conceitos básicos úteis para estudos de probabilidade.

Princípio multiplicativo $\boldsymbol{a.b.c}$ ...

Se uma pessoa possui três camisas, dois shorts e três calçados, de quantas maneiras ela poderá se vestir?

Potenciação $\boldsymbol{a^n}$

Se lançarmos uma moeda 5 vezes, quantos resultados distintos podem ser obtidos?

Permutação simples $\boldsymbol{n!}$

Quantos anagramas a palavra ROMA possui?

Fatorial $\boldsymbol{n! = n.(n-1).(n-2).\ldots 1}$

Determine 3! e 10!/7!. Por definição 1! = 1.

Arranjos $\boldsymbol{A_{n\ \ k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$

Um presidente e um vice serão selecionados de um grupo de 5 pessoas, quantas formas distintas existem para o caso?

Combinatória $\boldsymbol{C_{n\ \ p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$

Três pessoas serão selecionadas dentre um grupo de dez, quantas formas distintas existem para montarmos o grupo?