Distribuição binomial

Professor Fiore

Distribuição de Probabilidades de Variáveis Discretas

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta é uma tabela, gráfico, fórmula, ou outro dispositivo utilizado para especificar todos os valores possíveis da variável aleatória discreta juntamente com suas respectivas probabilidades.

A Distribuição Binomial

A Distribuição Binomial é uma das mais comuns e deriva de um processo conhecido como teste de Bernoulli.
Os experimentos binomiais têm a característica de apresentarem exatamente dois resultados complementares. Por exemplo, na medicina, o paciente pode sobreviver ou morrer; em processos industriais, a peça pode apresentar defeitos ou não.

No processo de amostragem, Bernoulli definiu que:

- Cada tentativa resulta em um dos resultados mutuamente excludentes. Um dos resultados possíveis é chamado (arbitrariamente) de sucesso e o outro de falha;
- A probabilidade de sucessos "p", permanece constante em todas as tentativas, assim como a probabilidade da falha, "q", equivalente a "1 – p";
- As tentativas são independentes; isto é, o resultado de uma tentativa particular não é afetado pelos resultados das outras tentativas.

Para cálculo usamos a fórmula:

$$P(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} . p^x . (1-p)^{n-x}$$

Onde:

n → Números de 'tentativas';

x → Números de 'sucessos';

p → Probabilidade de sucesso em cada tentativa;

1 – p → Probabilidade de fracasso, o complemento da probabilidade de sucesso;

P(x) → Probabilidade de x 'sucesso' em n 'tentativas'.

Exemplo 1 – Considerando que em um processo industrial, aleatoriamente três em cada 40 peças precisam ser recuperadas antes de prosseguir na linha de produção. A fim de analisar um lote com 50 peças, responda:

a. Esse processo é binomial?

Sim, pois a princípio cada peça precisará ou não ser recuperada.

b. O resultado em cada 'tentativa' afeta o outro?

Não, segundo o enunciado as peças a serem recuperadas são aleatórias, assim os resultados são independentes.

c. Qual a probabilidade de uma peça qualquer precisar ser recuperada?

p = 3/40 = 0,075 = 7,5%

d. Qual a probabilidade de encontrar 3 peças que precisam ser recuperadas neste lote?

p = 3/40 = 0,075

n = 50

x = 3

$$P(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} . p^x . (1-p)^{n-x}$$

$$P(3) = \frac{50!}{3!\,(50-3)!} .\ 0{,}075^3 .\ (1-0{,}075)^{50-3}$$

$$P(3) = \frac{50!}{3!\,(47)!} .\ 0{,}075^3 .\ (0{,}925)^{47}$$

$$P(3) = 19\,600 \,.\, 0{,}000421875 \,.\, 0{,}025624856 = 0{,}2119 = 21{,}19\%$$

e. Qual a probabilidade de encontrar menos que três peças a serem recuperadas do lote?

$P(0) = 0{,}0203$ $P(1) = 0{,}0822$ $P(2) = 0{,}1633$

$$P(x < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = 0{,}2658 = 26{,}58\%$$

f. Qual a probabilidade de mais que duas peças necessitarem de recuperação neste lote?

Neste caso, em vez de calcular $P(3) + P(4) + P(5) + \cdots + P(50)$, calcule o complemento.

$$P(x > 2) = 1 - P(x < 3) = 1 - 0{,}2658 = 0{,}7342 = 73{,}42\%$$

g. Qual a quantidade de peças que esperamos ter de recuperar neste lote?

7,5% de 50 é 3,75 $P(3) = 21{,}19\%$ e $P(4) = 20{,}19\%$, assim o esperado é 3 peças apresentarem problemas.

Exemplo 2 - Considere que 5% das lâmpadas de determinada marca apresentam defeito antes do fim do prazo de validade. Em um lote com 100 lâmpadas, qual a probabilidade de **nenhuma lâmpada** apresentar defeito antes do prazo? Qual a quantidade esperada de defeitos no lote com 100 lâmpadas?

p = 5% = 0,05

n = 100

x = 0

$$P(0) = \frac{100!}{0!\,(100)!} . 0{,}05^0 . (0{,}95)^{100} = 0{,}00592 = 0{,}592\%$$

Se 5% apresentam defeitos, esperamos 5% de 100, ou seja 5 lâmpadas com defeitos no lote.