Distribuição de Poisson

Professor Fiore

Distribuição de Probabilidades de Variáveis Discretas

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta é uma tabela, gráfico, fórmula, ou outro dispositivo utilizado para especificar todos os valores possíveis da variável aleatória discreta juntamente com suas respectivas probabilidades.

Distribuição de Poisson

A Distribuição de Poisson é uma distribuição discreta de probabilidades, aplicável à ocorrência de um evento em um intervalo especificado.

Como aplicações da Distribuição de Poisson, incluem-se: o estudo de acidentes com veículos; número de mortes por ataques cardíacos por ano, em determinada localidade; usuários de computador conectados à Internet; número de colônias de bactérias numa dada cultura por 0,01 mm², numa plaqueta de microscópio.

A variável aleatória x é o número de ocorrências do evento em um intervalo, que pode ser tempo, distância, área, volume ou outra unidade análoga. A probabilidade de o evento ocorrer x vezes em um intervalo é definida por:

μ → Valor esperado ou valor médio de ocorrência no intervalo.
x → Número de ocorrência no intervalo.
P(x) → Probabilidade de x ocorrência em um intervalo.
e → Número de Euler, que equivalente a 2,7182818284...
(Use 2,718 ou o valor da calculadora)

$$P(x) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!}$$

Características e propriedades.

1) Os eventos são independentes, ou seja, a ocorrência de um evento em um intervalo de espaço ou de tempo não tem qualquer efeito sobre a probabilidade de ocorrência de um segundo evento;
2) Teoricamente, um número infinito de ocorrências de um evento deve ser possível no intervalo, mesmo que na prática isso possa ser impossível;
3) A probabilidade de uma única ocorrência do evento em um dado intervalo é proporcional ao tamanho do intervalo;
4) Em uma porção infinitesimal do intervalo, a probabilidade de mais de uma ocorrência do evento é desprezível.

Exemplo 1 – Um vendedor de seguros vende em média 6 seguros por semana. Qual a probabilidade do vendedor vender apenas 3 seguros em uma semana?

Resolução, neste caso a média é 6 por semana ($\mu = 6\ por\ semana$), e o valor de x é 3 ($x = 3$).

$$P(x) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} \quad \rightarrow \quad P(3) = \frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!} = 0{,}0892 \ldots \approx 8{,}92\%$$

Exemplo 2 – Um vendedor de seguros vende em média 6 seguros por semana. Qual a probabilidade do vendedor vender algum seguro em uma semana qualquer?

Resolução, a média é 6 por semana e algum seguro indica 1 ou mais, $P(x > 0)$, neste caso é necessário calcular a probabilidade do complemento ao que foi perguntado.

$P(x) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} \rightarrow P(0) = \frac{6^0 \cdot e^{-6}}{0!} = 0{,}00247875 \ldots \approx 0{,}25\%$ assim a probabilidade desejada é $P(x > 0) = 99{,}75\%$

Exemplo 3 – A palavra inglesa queuing significa esperar em fila para ser servido. No dia a dia existem muitos exemplos de queuing, esperar em um semáforo, esperar na fila para passar no caixa de um supermercado, esperar um elevador, esperar um telefonema, etc. A distribuição de Poisson pode ser usada para prever o a probabilidade de um determinado número de pessoas ou elementos ingressar na fila de espera, em um intervalo de tempo.
Na agência central do banco Santandesco, temos em média, 14 clientes preferenciais acessando a fila do caixa por hora. Sendo assim, determine, a probabilidade de exatos 30 clientes ingressar na fila entre as 10h00 e as 12h00.

Resolução, como a pergunta envolve a ocorrência de algo em duas horas, ajustamos a média para 28 ocorrências em duas horas, equivalente a 14 por hora. E o valor de x era 30.

$$P(x) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} \rightarrow \; P(30) = \frac{28^{30} \cdot e^{-28}}{30!} = 0{,}067738 \ldots \approx 6{,}77\%$$

Exemplo 4 – Considerando que, número de pequenos defeitos na superfície em um painel de plástico, de um modelo de automóvel, segue distribuição de Poisson e que em média são encontrados 0,08 defeitos por metro quadrado. Determine a probabilidade de encontrar dois defeitos ou menos, em um painel com 3 metros quadrados, de um modelo de automóvel.

Resolução, o valor 0,08 defeitos por metros equivale a 0,24 defeitos em três metros, intervalo da questão. Dois defeitos ou menos é a soma de $P(x < 3) = P(x \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$$P(0) = \frac{0{,}24^0 \cdot e^{-0{,}24}}{0!} = 0{,}7866 \qquad P(1) = \frac{0{,}24^1 \cdot e^{-0{,}24}}{1!} = 0{,}1888 \qquad P(2) = \frac{0{,}24^2 \cdot e^{-0{,}24}}{2!} = 0{,}0227 \quad \rightarrow \quad P(x \leq 2) = 0{,}9981 = 99{,}81\%$$