Sistemas linear de equações

Professor Fiore

Equações são úteis para modelar sentenças reais. Por exemplo, a sentença “a soma do preço de dois produtos distintos é R$ 30,00”, pode ser representada pela equação linear x + y = 30. Essas equações são úteis na resolução de problemas de exatas.

As equações escritas na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, são denominadas equações lineares, onde os a_i são os coeficientes, os x_i são as incógnitas e os b_i são os termos independentes. Por sua vez um conjunto *S* com *m* equações e *n* incógnita forma um sistema linear de equações.

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Normalmente em vez de usar x_i para as incógnitas, usa-se letras distintas do nosso alfabeto. E a maioria dos sistemas tem o mesmo número de equações e incógnitas, mas isso não é uma regra.

O método mais eficaz para resolver um sistema é o escalonamento. Com ele uma ou mais incógnitas é cancelada, determinando sistemas equivalentes mais simples, que permite encontrar a solução do sistema original. A solução de um sistema é formada pelos valores numéricos que fazem as sentenças do sistema verdadeiras.

Os três princípios básicos para o escalonamento são

i. Duas equações (ou linhas da matriz) podem ser permutadas, trocadas de lugar.
ii. Uma equação (ou linha da matriz) pode ser multiplicada por um número diferente de zero.
iii. Uma equação (ou linha da matriz) pode ser substituída pelo resultado de um múltiplo dela adicionado a um múltiplo de outra linha.

Sistemas com duas equações e duas incógnitas são facilmente resolvidos seguindo o roteiro a seguir, baseado nos princípios do escalonamento.

Exemplo 1 – Resolva o sistema $S_1 = \begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - y = -14 \end{cases}$

1 - Copie o sistema e multiplique cada linha pelo coeficiente da outra linha (ii). Para ficar ainda mais fácil, mude o sinal dos valores.	$S_1 = \begin{cases} 2x + 3y = 9 & .3 & 6x + 9y = 27 \\ 3x - y = -14 & .(-2) & -6x + 2y = 28 \end{cases}$
2 - Some as equações (iii) para encontrar um sistema mais simples. Ao fazer isso depois do passo anterior uma das incógnitas irá ‘zerar’. Por fim resolva a equação e encontre o valor da primeira incógnita.	$11y = 55$ $y = 5$
3 - Substitua o valor encontrado em uma das equações iniciais e encontre o valor da outra incógnita.	$2x + 3.5 = 9$ $2x = -6$ $x = -3$
Escreva o resultado.	$S = \{(-3,\ 5)\}$

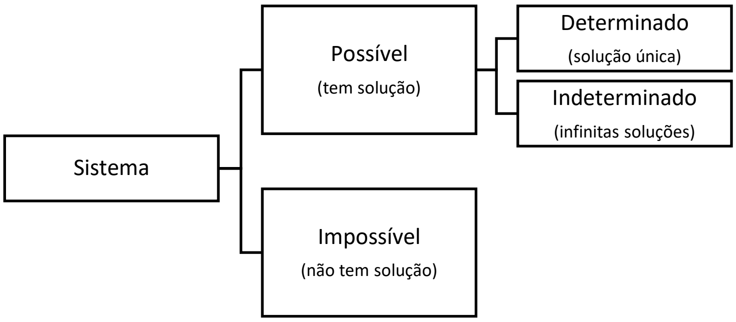
Em vez de usar o sistema com as incógnitas você pode usar uma matriz para representar o sistema, usando os coeficientes e os termos independentes dela. Ao escalonar a matriz a resolução fica mais suscinta e no final basta retornar a forma de equação para encontrar a solução.

$$S_1 = \begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - y = -14 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

Classificação de sistemas

Os sistemas podem ser classificados de acordo com a solução.

- Sistema possível e determinado (SPD) tem uma solução única.
- Sistema possível e indeterminado (SPI) tem infinitas soluções e é possível as escrever em função de uma das variáveis.
- Sistema impossível (SI), não tem solução, ou seja, S = ∅ ou S = {}.



Exemplo 2 – Resolva e classifique o sistema $S_2 = \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Neste caso, é possível 'cortar caminho', pois os coeficientes dos y's são valores opostos nas equações. Assim basta somar as equações e descobrir o valor de uma das incógnitas. Quando o sistema admite uma solução única ele é um **sistema possível e determinado - SPD.**

Resolução

$$S_2 = \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \qquad 3x = 6 \qquad x = 2$$

$$x - y = 1 \qquad 2 - y = 1 \qquad 1 = y \qquad S = \{(1, 2)\} \qquad SPD$$

Exemplo 3 – Resolva e classifique o sistema $I = \begin{cases} x - y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

$$I = \begin{cases} x - y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} .1 \\ .(-1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x - y = 3 \\ x - y = -1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} soma\ das\ equações \\ 0 + 0 = 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} S = \varnothing \\ SI \end{matrix}$$

Ao escalonar o sistema encontramos uma sentença impossível, pois 0 = 2 não faz sentido, sempre que isso ocorrer, o sistema é um sistema impossível e a solução será $S = \varnothing$.

Exemplo 4 – Resolva e classifique o sistema $P = \begin{cases} 2a + 4b = 2 \\ 4a + 8b = 4 \end{cases}$

$$P = \begin{cases} 2a + 4b = 2 \\ 4a + 8b = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} .(-4) \\ .2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -8a - 16b = -8 \\ 8a + 16b = 8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} soma\ das\ equações \\ 0 + 0 = 0 \end{matrix} \qquad \ldots$$

Ao escalonar esse sistema surgiu uma linha 'zerada' em ambos os lados, 0 = 0. Isso indica que o sistema é possível, pois 0 = 0 é uma sentença verdadeira, mas neste caso ele é indeterminado, pois existem infinitos pares de valores que fazem verdadeiras as sentenças do sistema.

É fácil ver quando um sistema com duas equações e duas incógnitas é possível e indeterminado, basta observar que uma linha é exatamente um múltiplo da outra, inclusive os termos independentes.

O conjunto solução neste caso será dado por expressões formada pelas equações. Conforme resolução ao lado.

$$2a + 4b = 2$$

$$4b = 2 - 2a$$

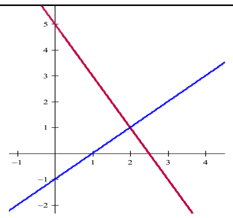
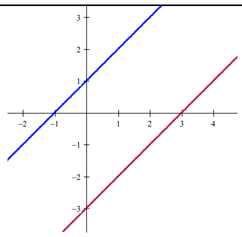
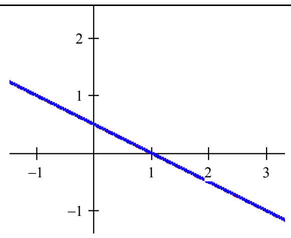
$$b = \frac{2 - 2a}{4} = \frac{1 - a}{2}$$

SPI e $S = \left\{\left(a,\ \frac{1-a}{2}\right)\right\}$

Para todo sistema com mesmo número de equações que incógnitas, é possível construir uma matriz quadrada com os coeficientes. Se o determinante dessa matriz quadrada for diferente de zero o sistema será possível e determinado. Quando o determinante dor zero, o sistema será possível e indeterminado ou impossível.

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - y = 17 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \det S_1 = -11$$

Para entender melhor as classificações possíveis para sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas é possível recorrer a representação gráfica de cada equação. Nesses casos, cada equação gera uma reta e as posições relativas entre as retas nos indica a classificação do sistema.

$S_2 = \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$	$I = \begin{cases} x - y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$	$P = \begin{cases} 2a + 4b = 2 \\ 4a + 8b = 4 \end{cases}$
Quando as retas são concorrentes se cruzam em um único ponto e o sistema é possível e determinado.	Quando as retas são paralelas não possuem pontos em comum, sendo o sistema impossível.	Quando as retas são coincidentes, temos infinitos pontos em comum, e o sistema é possível e indeterminado.
		
As equações não são proporcionais.	Os coeficientes são proporcionais, mas os termos independentes não seguem a proporção.	As equações são propoporcionais.

Problemas

Muitas situações são facilmente descritas com sistemas e ao resolvê-lo é possível encontrar a solução do problema.

Exemplo 5 - (Faap-SP) Ache dois números reais cuja soma é 9 e cuja diferença é 29.

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 29 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2x = 38 \\ x = 19 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x + y = 9 \\ 19 + y = 9 \\ y = -10 \end{matrix}$$

Outros métodos

Além do escalonamento sistemas com duas equações e duas incógnitas podem ser resolvidos por **substituição**. Onde uma incógnita é isolada em uma das equações e substituída na outra equação. Esse método é útil especialmente para resolver alguns sistemas não lineares.

Também é possível usar a ***regra de Cramer***, onde a solução é dada pela razão entre alguns determinantes de matrizes montados com os coeficientes e termos independentes. A regra de Cramer diz que a solução de um sistema pode ser dada por:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} \qquad \dots \qquad x_n = \frac{D_n}{D}$$

Onde D é o determinante da matriz dos coeficientes e D_i é o determinante da matriz com os coeficientes onde a coluna i é substituída pelos termos independentes.

Considerações adicionais

- Quando os termos independentes são todos zeros, dizemos que o **sistema é homogêneo**. Esses são sempre possíveis, pois a princípio possuem a solução trivial formada por zeros.
- Sistemas com três incógnitas é preferível resolver por escalonamento ou com a regra de Cramer.
- Sistemas com mais de três incógnitas, é preferível resolver por escalonamento.
- Fique atento que, em problemas, nem sempre você precisa encontrar o valor de todas as incógnitas.
- O produto entre a matriz dos coeficientes e uma matriz coluna com as incógnitas, resulta em uma matriz coluna com os termos independentes. Conforme o exemplo abaixo.

$$S_1 = \begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - y = -14 \end{cases} \qquad \underset{Matriz\ dos\ coeficientes}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{Solução}{\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}} = \underset{Termos\ Independentes}{\begin{pmatrix} 9 \\ -14 \end{pmatrix}}$$