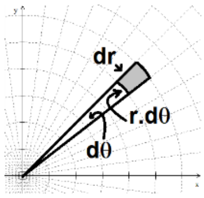
Integrais duplas em coordenadas polares

Professor Fiore

Se f for uma função contínua no retângulo polar R dado por $0 \le a \le r \le b$ e $\alpha \le \theta \le \beta$, onde $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$, então:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$



Note que $dA = rdrd\theta$, conforme indicado na figura ao lado.

Esta estratégia é útil dependendo da região ou da integral a ser calculada. E para montar a integral, use as fórmulas.

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

Exemplo 1 - Calcule a integral $\iint_R cos(x^2+y^2)dA$, onde R é a região dentro do círculo $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{4}$, no primeiro quadrante do plano cartesiano.

1 – Para o caso, não é possível encontrar essa integral e a região é facilmente descrita como coordenadas polares, assim $\iint_R cos(x^2+y^2)dA = \iint_R cos(r^2)\,rdrd\theta$.

2 – O círculo $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{4}$, tem $r = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, e os valores dentro dele é definido por $0 \le r \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

A região compreendida no primeiro quadrante é definida por $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

3 – Portanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} cos(r^2)\,rdr\,d\theta \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(r^2)}{2}\Big|_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} d\theta \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} d\theta \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{4}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

Exemplo 2 - Calcule $\iint_R (3x - y + 2)\,dA$, onde R é a região definida pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

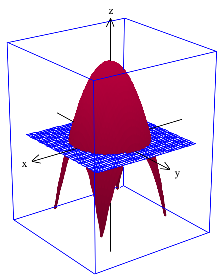
A região em questão é mais bem descrita em coordenadas polares, assim $\iint_R (3r\cos\theta - r\sin\theta + 2)\,rdrd\theta$. O retângulo polar é limitado por $1 \le r \le 2$, de acordo com os círculos e $0 \le \theta \le 2\pi$, pois queremos tudo entre os raios.

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 (3r\cos\theta - r\sin\theta + 2)\,rdr\,d\theta \qquad \int_0^{2\pi}\int_1^2 (3r^2\cos\theta - r^2\sin\theta + 2r)\,dr\,d\theta \qquad \int_0^{2\pi} (r^3\cos\theta - \frac{r^3}{3}\sin\theta + r^2)\Big|_1^2 d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} (7\cos\theta - \frac{7}{3}\sin\theta + 3)\,d\theta \qquad 7\sin\theta + \frac{7}{3}\cos\theta + 3\theta\Big|_0^{2\pi} \qquad 6\pi$$

Exemplo 3 - Determine o volume do sólido paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, da região acima do plano cartesiano.

Para definir a região, considere o círculo que forma a base, a curva de nível no plano cartesiano dado por $0 = 4 - x^2 - y^2$. Assim $0 \le r \le 2$ e $0 \le \theta \le 2\pi$, pois desejamos todos os pontos 'dentro' da curva de nível da base.

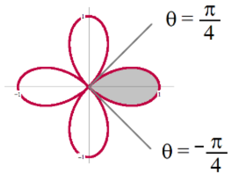


$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\,rdr\,d\theta = \int_0^{2\pi} (2r^2 - \frac{r^4}{4})\Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 4\,d\theta = 4|_0^{2\pi} = 8\pi$$

Atividades

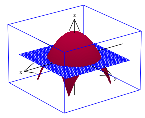
1. Calcule a integral $\iint_R sin(x^2+y^2)dydx$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2+y^2=\pi$. (Dica: note que o primeiro quadrante é definido por $0 \le \theta \le {}^{\pi}/_{2}$)

2. Qual o volume do sólido entre o plano cartesiano, os círculos $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$ e $z=x+6$?



3. Qual o volume do sólido acima do plano cartesiano, a direita do eixo y, limitado pelos círculos $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$ e $z=y+10$?

4. Determine a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas, $r=cos\,2\,\theta$ (fig. ao lado). Dica um laço da rosácea pode ser dado $D=\{(r,\theta)| \quad -\pi/4 \le \theta \le \pi/4, \quad 0 \le r \le cos\,2\,\theta\}$



5. Determine o volume (em m³) do solido abaixo do paraboloide elíptico $z=1-x^2-y^2$, acima do plano cartesiano.

6. Calcule $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, onde R é a região do semiplano superior limitado pelos círculos $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$.

7. Calcule $\iint_R (3x-y)\,dA$, onde R é a região definida pelos círculos $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=9$.

8. Determine o volume (em cm³) do sólido acima do plano xy, definido por um paraboloide elíptico $z=9-x^2-y^2$, com um furo cilíndrico centrado e paralelo ao eixo z, com raio de 1 cm.

9. Considere o solido formado pela região da equação $x^2+y^2=4$ no plano cartesiano e a função $z=5$.
   a. Use integral dupla para calcular o volume do sólido.
   b. Qual figura o enunciado define?
   c. Confira o resultado usando outro método possível para este caso.

10. Considere o cilindro definido pela equação $x^2+y^2=r^2$, de raio r e altura h, $z=h$. Usando integral dupla deduza a fórmula do volume do cilindro.

Respostas – parciais

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(r^2)\,r\,dr\,dt = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^3 (r\cos(t)+6)\,r\,dr\,dt = 48\pi \approx 150.796$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_2^3 (r\sin(t)+10)\,r\,dr\,dt = 25\pi \approx 78.5398$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr\,dt = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos(2t)} 1\,r\,dr\,dt = \frac{\pi}{8} \approx 0.392699$$

$$\int_0^{2\pi}\int_2^3 (9r-r^3)\,dr\,dt = \frac{25\pi}{2} \approx 39.2699$$

$$\int_0^{\pi}\int_2^4 r^2\,dr\,dt = \frac{56\pi}{3} \approx 58.6431$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^3 (3r\cos(t)-r\sin(t))\,r\,dr\,dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^3 (9-r^2)\,r\,dr\,dt = 32\pi \approx 100.531$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 5\,r\,dr\,dt = 20\pi \approx 62.8319$$

Um solido com base circular e altura fixa é um cilindro.

$$\iint_R h dA = \int_0^{2\pi}\int_0^r hrdrd\theta = h.\pi r^2$$

Os resultados podem ser expressos de forma diferente, antes de achar que errou, confira se não tem uma equação equivalente.