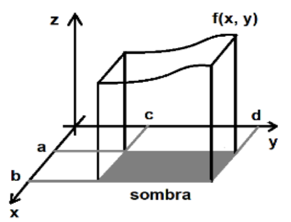
Integrais duplas sobre região geral

Professor Fiore

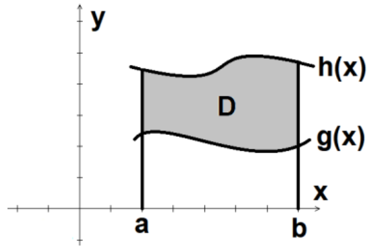
Para calcular a integral dupla de uma função de duas variáveis $f(x,y)$ em uma região retangular $R = \{(x,y) \in R^2 |\ a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ é usada a integral iterada abaixo. E quando $f(x,y) \geq 0$ na região o resultado indica o volume do sólido acima da área retangular e abaixo da superfície.



$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dydx \qquad \text{ou} \qquad \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy$$

Um raciocínio semelhante pode ser usado para determinar o valor da integral dupla de uma função $f(x,y)$ em uma região geral D, pertencente ao domínio da função $f(x,y)$, e expressa por funções. Novamente, se $f(x,y) \geq 0$ na região, o resultado indica o volume do sólido sobre a região e abaixo da superfície, mas nem toda integral iterada representa o volume de sólidos.

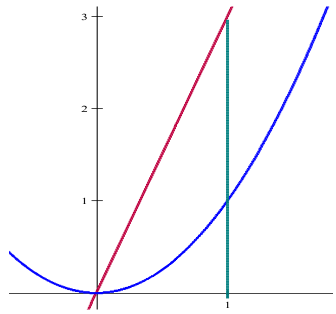
Integral dupla sobre região geral – Tipo I



Dada uma região definida por $D = \{(x,y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b\,, g(x) \leq y \leq h(x)\}$, onde o valor de $h(x) \geq g(x)$ na região limitada por $[a,b]$, a integral iterada de uma função $f(x,y)$ é definida abaixo e essa região é do tipo I.

$$\iint\limits_D f(x,y) dA = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dydx$$

Exemplo 1 – Determine o volume do sólido abaixo da superfície $f(x,y) = x + 2y$ limitada pela reta $y = 3x$ e pela parábola $y = x^2$ no intervalo $x = 0$ à $x = 1$.



1 – Verifique a região e a posição das funções. Desenhe os gráficos se necessário.

No caso, para todos os pontos da região D, os valores de $y = 3x$ são maiores que os valores de $y = x^2$, conforme o gráfico.

Portanto essa é uma região tipo I e $x^2 \leq y \leq 3x$ nela.

2 – Se for tipo I, determine o intervalo numérico para x, da região.

Conforme o enunciado, $x = 0$ à $x = 1$, sendo $0 \leq x \leq 1$.

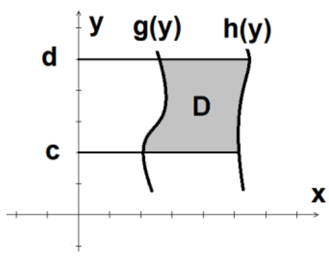
3 – Monte a integral e resolva.

$$\int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dydx = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{3x} (x + 2y)\, dydx$$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{3x} (x + 2y)\, dydx = \int\limits_0^1 xy + y^2 \Big|_{x^2}^{3x} dx = \int\limits_0^1 \left(x.3x + (3x)^2 - (x.x^2 + (x^2)^2)\right) dx$$

$$\int\limits_0^1 (-x^4 - x^3 + 12x^2)\, dx = -\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{1}\Bigg|_0^1 = \frac{71}{20}$$

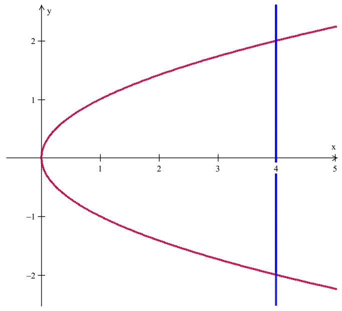
Integral dupla sobre região geral – Tipo II



Dada uma região definida por $D = \{(x,y) \in R^2 \mid g(y) \leq x \leq h(y)\,, c \leq y \leq d\}$, onde o valor de $h(y) \geq g(y)$ na região limitada por $[c,d]$, a integral iterada de uma função $f(x,y)$ é definida abaixo e essa região é do tipo II.

$$\iint\limits_D f(x,y) dA = \int\limits_c^d \int\limits_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\, dxdy$$

Exemplo 2 – Calcule $\iint_D (2x)dA$, onde a região D e limitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $x = 4$.



1 – Verifique a região e a posição das funções. Desenhe os gráficos se necessário.
As duas funções delimitam uma área e nesta área a parábola sempre está à esquerda da reta. Assim essa região é tipo II e na região $y^2 \leq x \leq 4$.
2 – Se for tipo II, determine o intervalo numérico para y, da região.
No caso, é preciso igualar as funções $x = y^2$ e $x = 4$ para encontrar os pontos onde elas se cruzam e delimitar a região.

$$y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad y = \pm 2 \quad \rightarrow \quad -2 \leq y \leq 2$$

3 – Monte a integral e resolva.

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} 2x\, dxdy$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} 2x\, dxdy = \int_{-2}^{2} x^2|_{y^2}^{4}\, dy = \int_{-2}^{2} (4^2 - (y)^2)\, dy = \int_{-2}^{2} (16 - y^4)\, dy =$$

$$16y - \frac{y^5}{5}\Big|_{-2}^{2} = 16.2 - \frac{2^5}{5} - \left(16.(-2) - \frac{(-2)^5}{5}\right) = \frac{256}{5}$$

Considerações gerais

Desenhar o gráfico ajuda no estudo da região, mas as vezes basta analisar valores das funções dentro do intervalo dado. Nos casos onde é preciso esboçar os gráficos, lembre-se que, dois pontos são suficientes para esboçar retas, e para esboçar parábolas, determinar o vértice e usar seus ‘vizinhos’ costuma ser suficiente. Também vale usar os limites numéricos dados nos problemas, eles são bons pontos para o problema estudado.

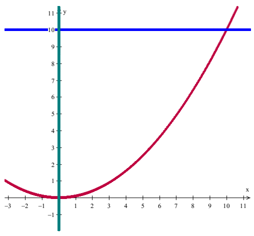
Para montar a integral, isole uma das variáveis de acordo com a região. No caso do Tipo I, quando as funções determinam a parede ‘de cima’ e a parede ‘de baixo’, isole a variável y. No caso Tipo II, quando as funções definem as paredes laterais, da esquerda e da direita, isole a variável x. Vale dizer que, algumas situações podem ser resolvidas tanto como Tipo I como Tipo II, já outras não se enquadram em nenhum dos tipos. Para essas geralmente é possível dividir a região em partes e integrar ‘pedaço’ a ‘pedaço’.

Eventualmente os eixos podem ser usados como referências para definir uma região, sendo assim, lembre-se que o eixo das abcissas (x) pode ser dado pela equação y = 0, e o eixo das ordenadas (y), pode ser escrito como x = 0. Também é comum ter de encontrar o cruzamento entre as funções que geram a região para determinar os valores numéricos da integral dupla, para isso basta igualar as funções que delimitam a região D.

Caso queira determinar a área da região D, basta calcular $\iint_D 1\, dA$, isto equivale a calcular o volume de um sólido de altura 1, sendo que o valor numérico do volume do sólido nesta condições equivale ao valor da área da região, mudando apenas a unidade de medida, visto área ser un² e volume ser un³. Caso queira calcular o volume de uma peça de altura fixa h, basta calcular $\iint_D h\, dA$ na região dada.

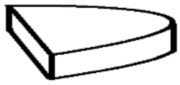
Atividades – TIPO I

1. Calcule $\iint_D (2x+y)dA$, onde a região D é limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = x + 2$.
2. Calcule $\iint_D (xy+3)dA$, onde a região D e limitada pelas parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = 2x^2$.
3. Determine o volume do sólido abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região limitada pelas equações $y = x^2$ e $y = 1$ no plano xy.
4. Um arquiteto projetou um prédio e deseja calcular o volume interno de uma das salas, para instalar ar-condicionado no local. A parte da sala que ele quer calcular a área tem as paredes medidas em metros, de acordo com o gráfico.
   A função usada para a parede curva é $10y = x^2$, a função que delimita a parede do fundo é dada por $y = 10$, a parede lateral direita é dada por $x = 0$ e o telhado tem inclinação de acordo com a função $z = \frac{x}{5} + \frac{y}{5} + 3$ determine o volume interno da sala.

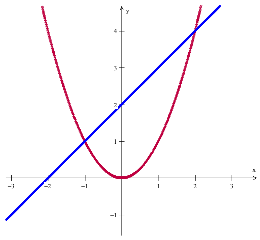


5. A peça ao lado foi desenvolvida a partir do plano $z = 5$, da reta $y = 0$, da curva $y = e^x$ e das retas $x = 0$ e $x = 1$. Usando integral dupla determine o volume da peça e a área da base.

6. A lateral da peça ao lado foi desenhada a partir da curva $y = -x^2 + 4$ e o eixo das abscissas (eixo x). Considerando que a altura da peça seja de 2 cm e que todas as demais medidas estejam em cm.

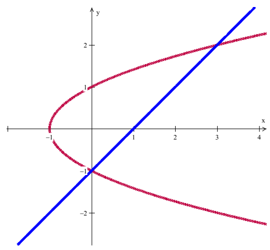


   a. Determine o volume da peça
   b. Determine área da base.
   c. Considere que a peça sofrerá um corte definido pelo plano $z = \frac{y}{4}$, defina o volume das duas partes.
7. Uma peça foi desenhada considerando a região limitada pela a parábola $y = x^2$, a reta $y = x + 2$, o plano xy como base e a superfície $z = yx^2 + 1$ como o alto da peça.
   a. Qual o volume da peça?
   b. Qual a área limitada pelas curvas?



8. Considere o sólido delimitado lateralmente pela parábola $y = x^2 - 1$ e pela reta $y = 8$. Sabendo que a base é dada pelo plano xy e a superfície superior é dada por $z = 2x + 4y + 2$, determine o volume do sólido.
9. Determine o volume do sólido acima do plano xy, formada pelo plano $z = x + y$, limitadas pelos eixos e pela reta $y = -x + 3$.
10. Uma peça foi desenvolvida a partir do plano $z = 3x$, da reta $y = 0$, da curva $y = e^x$ e das retas $x = 0$ e $x = 2$. Usando integral dupla determine o volume da peça.

Atividades TIPO II



1. Considerando a região limitada pela parábola implícita $y^2 = x + 1$, a reta $y = x - 1$ e sob a superfície $z = 6 + 4y$.

a. Qual o volume do sólido?

b. Qual a área limitada pelas curvas?

2. Calcule $\iint_D (3x)dA$, onde a região D e limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x = -y^2 + 2$.
3. Calcule $\iint_D (4+x)dA$, onde a região D e limitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta e $x = 1$.
4. Calcule o volume de uma peça com altura 4 cm e laterais definidas pelas retas $y = 3$, $y = -3$, $x = 2$ e pela parábola $x = y^2 - 2$. Desenhe a peça.

Gabarito – Sujeito a ajustes

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}(2x+y)\,dy\,dx = \frac{117}{10} = 11.7$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{x^2+1}(xy+3)\,dy\,dx = 4$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,dy\,dx = \frac{88}{105} \approx 0.838095$$

$$\int_{0}^{10}\int_{\frac{x^2}{10}}^{10}\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{5}+3\right)dy\,dx = 330$$

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{e^x}5\,dy\,dx = 5\,(e-1) \approx 8.59141$$

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{e^x}1\,dy\,dx = e-1 \approx 1.71828$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{-x^2+4}2\,dy\,dx = \frac{64}{3} \approx 21.3333$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{-x^2+4}1\,dy\,dx = \frac{32}{3} \approx 10.6667$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{-x^2+4}\frac{y}{4}\,dy\,dx = \frac{64}{15} \approx 4.26667$$

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}\left(y\,x^2+1\right)dy\,dx = \frac{423}{35} \approx 12.0857$$

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}1\,dy\,dx = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\int_{-3}^{3}\int_{x^2-1}^{8}(2x+4y+2)\,dy\,dx = \frac{3528}{5} = 705.6$$

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{-x+3}(x+y)\,dy\,dx = 9$$

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{e^x}3x\,dy\,dx = 3\left(1+e^2\right) \approx 25.1672$$

TIPO II

$$\int_{-1}^{2}\int_{y^2-1}^{y+1}(6+4y)\,dx\,dy = 36$$

$$\int_{-1}^{2}\int_{y^2-1}^{y+1}1\,dx\,dy = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{-y^2+2}3x\,dx\,dy = 8$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}(4+y)\,dx\,dy = \frac{16}{3} \approx 5.33333$$

$$\int_{-3}^{3}\int_{y^2-2}^{2}4\,dx\,dy = 24$$