Equações Diferenciais Separáveis

Professor Fiore

Uma ***equação diferencial é uma equação que envolve uma função desconhecida e suas derivadas***. A ***ordem*** da equação é indicada pela derivada de ordem mais alta. E ela será classificada de acordo com o número de variáveis independentes da solução, se ela for uma função de uma variável a equação diferencial é **ordinária**, caso tenha mais de uma variável ela é uma equação diferencial **parcial**.

Para resolver uma equação diferencial existem alguns ***métodos*** a serem aplicados de acordo com a classe, ordem e o 'formato' da equação. A seguir você irá encontrar a estratégia mais simples, para solucionar algumas equações diferenciais.

Equações diferenciais de primeira ordem separáveis são equações que podem ser escritas na forma a seguir, onde você literalmente separa as variáveis.

$$h(y)dy = g(x)dx.$$

Para resolver equações do tipo, basta seguir os dois passos abaixo.

1. Verifique se a equação pode ser escrita na forma $h(y)dy = g(x)dx$.
2. Após 'organizar' no formato acima, integre os dois lados e isole o y, se possível.

Não é necessário colocar a constante C nos dois lados a serem integrados, visto que a soma de dois números quaisquer resulta em outro número qualquer, logo basta colocar a constante C na integral do lado da variável independente.

A princípio, a solução encontrada é chamada de **solução geral**, e quando temos um **valor inicial**, encontramos uma **solução particular**, onde a constante C será substituída por um número.

Normalmente, para conferir o resultado, basta substituir a solução na equação. Mas nem sempre isso é fácil, pois algumas soluções são expressas como uma equação **implícita**, onde não é possível ou conveniente isolar y, conforme o exemplo abaixo.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y + \sin y} \quad \rightarrow \quad y^2 - \cos y = x^3 + c$$

Ao lidar com a constante C, que representa um valor qualquer, vale considerar as seguintes propriedades:

$C_1 + C_2 = C$ $\qquad f(x) - C_1 = f(x) + C$ $\qquad e^{f(x)+c_1} = e^{c_1}e^{f(x)} = Ce^{f(x)}$, onde $C = e^{c_1}$.

E sempre é bom relembrar algumas propriedades básicas de matemática, como:

$$\ln e = 1 \qquad e^{lnx} = x \qquad e^{alnx} = x^a$$

Atividades

1. Encontre a solução geral para as equações abaixo.

a. $y' = \sin 5x$

b. $y' = e^{3x}$

c. $\frac{dy}{dx} = 3\ln x$

d. $y' = 3y$

e. $y' = 3x^5 y$

f. $xy' = y$

g. $xy' = 7$

h. $x^2 y' = 5$

i. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 3x}{y}$

j. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^5 - 3x}{y^2}$

k. $7x^2 dx + 3y^2 dy = 0$

l. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{3y^2}$

m. $y' = \frac{5x^4}{y}$

n. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^5}{y^2}$

o. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x + \cos x}{6y}$

2. Encontre a solução particular para as equações abaixo e seus valores iniciais.

a. $y' = 3x^2 y$ para $y(0) = 5$

b. $y' = 5y$ para $y(0) = 7$

c. $y' = \frac{4x^3}{y}$ para $y(2) = 7$

d. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + \cos x}{2y}$ para $y(0) = 3$

e. $xy' = 4$ para $y(e) = 5$

3. Encontre a solução para as equações abaixo, deixe a solução escrita de forma implícita.

a. $y' = \frac{8x}{6y + \sin y}$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^5}{y^2 - y}$

4. Um dia desses ocorreu algo interessante. Para a equação $(2yx + 4y)dy = dx$, dois estudantes resolveram por caminhos 'levemente' distintos e ambos estão corretos, apesar das equações encontradas serem distintas.
   a. O primeiro estudante isolou apenas o y. Faça o mesmo e resolva a equação.
   b. O segundo estudante isolou 2y. Faça o mesmo e resolva a equação.
   c. Mostre que ambos são válidos para a equação, substituindo-as na equação.
   d. Que conclusão podemos chegar.
   e. Agora verifique a equação $y = \sqrt{\ln|ax + 2a| + c}$, sendo $a \neq 0$.

Gabarito – necessário correção

Atividades 1

a. $y = -\frac{\cos 5x}{5} + c$

b. $y = \frac{e^{3x}}{3} + c$

c. $y = -3x + 3x\ln x + c$

d. $y = ce^{3x}$

e. $y = ce^{\frac{x^6}{2}}$

f. $y = cx$

g. $y = 7\ln x + c$

h. $y = -\frac{5}{x} + c$

i. $y = \sqrt{\frac{x^4-6x^2+c}{2}}$

j. $y = \sqrt[3]{\frac{x^6-9x^2+c}{2}}$

k. $y = \sqrt[3]{\frac{-7x^3+c}{3}}$

l. $y = \sqrt[3]{e^x + c}$

m. $y = \sqrt{2x^5 + c}$

n. $y = x^2 + c$

o. $y = \sqrt{\frac{5x^2+2\sin x+c}{6}}$

Atividades 2 – dependendo do local que colocar a constante o valor pode ser escrito de outras formas.

a. $y = 5e^{x^3}$

b. $y = 7e^{5x}$

c. $y = \sqrt{2x^4 + 17}$

d. $y = \sqrt{\frac{x^2}{2} + \sin x + 9}$

e. $y = 4\ln x + 1$

Atividades 3 – nestes casos temos as soluções implícitas, onde não isolamos facilmente o y.

a. $3y^2 - cosy = 4x^2 + c$

b. $\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^6}{6} + c$

Atividade 4 – O objetivo desta atividade é investigar soluções distintas para uma equação diferencial.

a. Solução 1 → $y = \sqrt{\ln|x+2| + c}$

b. Solução 2 → $y = \sqrt{\ln|2x+4| + c}$

c. Tem que fazer....

d. Equações diferenciais podem ter mais de uma solução.

e. Também será solução.

Para outras soluções consulte o site https://www.wolframalpha.com e lembre-se que, no site log(x) equivale a ln(x) e há mais de um modo de escrever a solução.