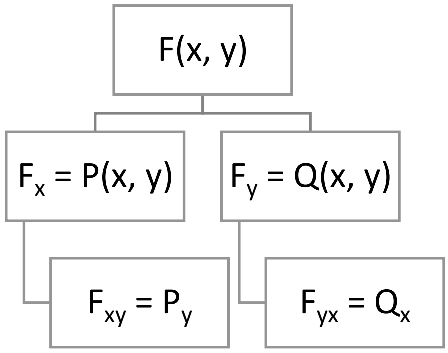
Equações diferenciais exatas – Resumo teórico

Professor Fiore

Uma equação diferencial é exata se ela pode ser escrita na forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, com $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ e a solução será uma equação implícita escrita na forma $F(x,y) = c$.



Ao lado há um diagrama que mostra a relação entre a equação $F(x,y)$ as equações $P(x,y)$ e $Q(x,y)$. Note que as derivadas parciais de $F(x,y)$ nos dão as equações abaixo, $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$, fato que pode ser usado para verificar o resultado encontrado. Outro detalhe indicado pelo diagrama é que o teste inicial funciona graças ao teorema de Clairaut, onde $f_{xy} = f_{yx}$.

Esta construção se dá pelo fato já estudado que, para uma função $f(x,y)$, se tem $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ e no caso especial em que $f(x,y) = c$, será valido $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$. Assim, em uma família de curvas com $f(x,y) = c$, é possível gerar uma equação de primeira ordem computando a diferencial em ambos os lados da igualdade.

Um exemplo de aplicação de equação diferencial exata pode ser encontrado no livro 'Equações diferenciais com aplicações em modelagens', do autor Dennis G. Zill. Nele é dito que, a equação diferencial exata abaixo, permite encontrar uma família de curvas que podem ser interpretadas como as linhas de fluxo de um fluido em trono de um objeto circular, com limite descrito por $x^2 + y^2 = 1$.

$$\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx + \left[1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]dy = 0$$

Segue abaixo um roteiro em 5 passos para resolver equações diferenciais exatas.

1 – Escreva a equação no formato $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ e verifique se ela é exata, quando $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

2 – Se for exata, encontre $\int P(x,y)dx = F(x,y)$ e considere como constante uma função $g(y)$.

3 – Encontre a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}$ e iguale a função $Q(x,y)$. Lembre-se que a derivada de $g(y)$ é $g'(y)$.

4 – Após cancelar o que for possível encontre a função $g(y)$, integrando ambos os lados da igualdade.

5 – Escreva a solução final usando substituindo $g(y)$ em $F(x,y)$ e a escreva no formato $F(x,y) = c$.

Atividades

1. Verifique se as equações diferenciais abaixo são exatas, se sim resolva-as
   a. $(3x^2y+3)dx+(x^3+3y)dy=0$
   b. $(r^2+2rt)dr+(3+r^2)dt=0$
   c. $(x^2y+3)dx+(2x^3+1)dy=0$
   d. $(\sin y+3x^3)dx+x\cos y\,dy=0$
   e. $(2xe^y+3y^2x^2)dx+(x^2e^y+2yx^3)dy=0$
   f. $e^t dt+\sin x\,dx=0$
   g. $3x^2ydx+(x^3cosy)dy=0$

2. Verifique se a equação $x\frac{dx}{dy}=xe^x-y$ é exata, se sim, resolva-a

3. Encontre uma equação diferencial exata com solução igual a $yx^2+3\cos(y)=0$
4. Determine o valor de k, para que a equação $(kx^2y+3)dx+(4x^3+1)dy=0$ seja exata.

5. Verifique se as equações diferenciais abaixo são exatas, se sim resolva-as
   a. $(xe^x+e^x)dx+2ydy=0$
   b. $2r\sin t\,dr=(1-r^2\cos t)\,dt$
   c. $(y^2+5\cos(5x))dx=-2ydy$
   d. $\sin x\,dx-y^2dy=0$

6. A equação da atividade anterior $\sin x\,dx-y^2dy=0$ não é exata, mas pode ser resolvida por outro método, qual? Encontre a solução.

7. Resolva cada equação diferencial abaixo considerando o valor inicial dado.
   a. $e^xdx+dy=0$, para $y(0)=5$
   b. $(r-6t)dt=-tdr$, para $r(1)=2$
   c. $y\cos x\,dx+(\sin x+2y)dy=0$, para $y(0)=2$

8. Determine um valor de $P(x,y)$ para que a equação $P(x,y)dx+(4x^3y^3-\sin y)dy$ =0 seja exata.

Comparando os métodos

9. Resolva a equação diferencial a seguir como uma equação diferencial exata, depois resolva novamente separando as variáveis. Comente o que você percebeu e aprendeu ao resolver uma mesma equação usando dois métodos.

$$(6x+4)dx+(y^2-2)dy=0$$

10. Resolva a equação diferencial a seguir como uma equação exata, depois reescreva ela como uma equação diferencial linear de primeira ordem ($xy'+y=x$) e resolva usando o fator integrante. Comente o que você percebeu e aprendeu ao resolver uma mesma equação usando dois métodos.

$$(y-x)dx+xdy=0$$