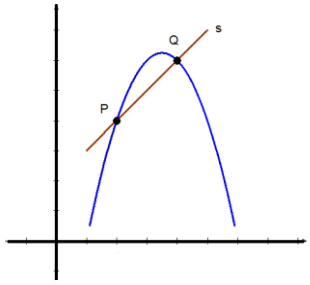
Derivada – Definição.

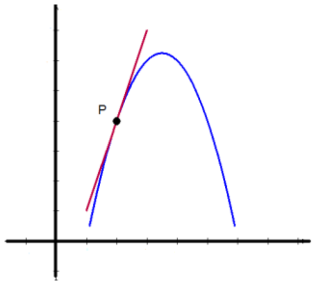
Professor Fiore

Considere uma função $f(x)$, contínua em um intervalo $[a, \quad b]$. Dado dois pontos dentro do intervalo, P e Q, sendo que Q está um pouco à frente de P, onde foi acrescido Δx ao valor de x do ponto P (marque ao lado as coordenadas para os pontos). Estes dois pontos definem uma reta secante ao gráfico, cuja inclinação é dada por:



$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Note que, se $\Delta x \to 0$ a reta secante tende a uma reta tangente ao ponto P, ao mesmo tempo a equação para a reta tangente ao ponto pode ser encontrada como:



$$m_t = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Em resumo, **a derivada de uma função será outra função que nos dá a inclinação da reta tangente a cada ponto**.

Note que o mesmo cálculo para encontrar a inclinação da reta, pode ser usado para calcular a taxa de variação entre as grandezas representadas. Por exemplo:

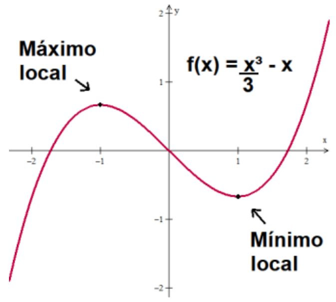
- Para a função $S(t)$, que indica a posição de um objeto (em metros) em função do tempo (em segundo), a taxa de variação (velocidade) será medida em metros/segundos, pois $^{\Delta S}/_{\Delta t} \to {^m}/_s$.
- Dada a função $V(t)$, onde V é o volume de água em um tanque (em litros) em função do tempo (em minutos). A taxa de variação (vazão) será medida em litros/minutos, pois $^{\Delta V}/_{\Delta t} \to {^L}/_{min}$.
- Para uma amostra de 'gás ideal' mantida em temperatura constante, a fórmula $V = \frac{k}{P}$, relaciona o volume (em litros), com a pressão (em atm), sendo k uma constante, segundo a lei de Boyle-Mariotte. A taxa de variação será $^{\Delta V}/_{\Delta P} \to {^L}/_{atm}$.
- Quando uma grandeza y varia em função de outra grande x, a unidade de medida da taxa de variação é medida pela razão entre as unidades de medidas de y e x, $^{un \quad y}/_{un \quad x}$.

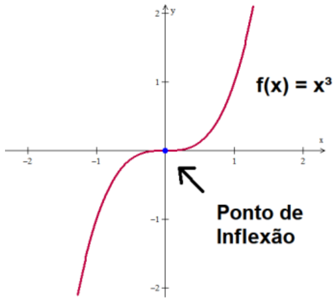
Assim também podemos dizer que **a derivada de uma função nos dá a taxa de variação instantânea** entre as grandezas, no ponto usado.

Neste momento, temos de destacar que, para cada valor x, pertencente ao domínio, temos uma imagem y encontrada com a função $f(x) = y$. Esta usamos para desenhar o gráfico.

Agora se colocarmos o mesmo valor x, na derivada da função, encontramos a taxa de variação entre as grandezas ou a inclinação da reta tangente ao ponto no gráfico. Esta pode ser usada para avaliar o crescimento da função, se a função for crescente no ponto o valor da derivada será positivo no ponto e se a função dor decrescente no ponto o valor da derivada no ponto será negativo.

Note que quando $f(x) = 0$ encontramos as raízes da função, valores onde o gráfico corta o eixo das abscissas. Por outro lado, quando temos $f'(x) = 0$, temos o que é chamado de ponto crítico, onde há um ponto de máximo local, mínimo local ou inflexão. Assim para encontrar pontos críticos basta **<u>derivas a função e igualar a zero</u>**. Isto será útil quando queremos encontrar pontos que otimizam problemas.



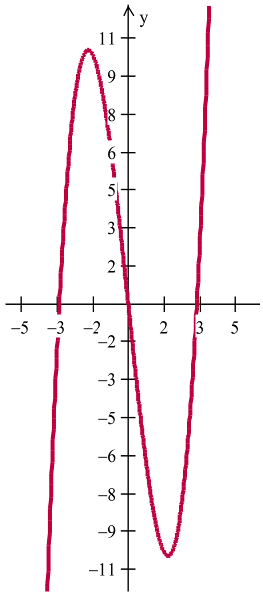


Para verificar se em um ponto crítico há um ponto é máximo, mínimo ou inflexão, basta analisar os vizinhos dele. Se os valores de y's ambos forem menores que no ponto crítico, temos um ponto de máximo. Se os valores dos y's vizinhos forem maiores temos um ponto de mínimo. E por fim se os valores vizinhos de y's forem intercalados, temos um ponto de inflexão.

Por fim, vale comentar que nem todas as funções são deriváveis em todos os pontos e nem sempre podemos encontrar máximos e mínimos igualando as derivadas, pois o comportamento de algumas funções é relativamente 'estranhos'. Mas não se preocupe com isso, pois normalmente esses casos não serão estudados neste momento.

Atividades e exemplos

Atividade 1 – Neste caso, pense na derivada como a função que da a inclinação da reta tangente para cada ponto.



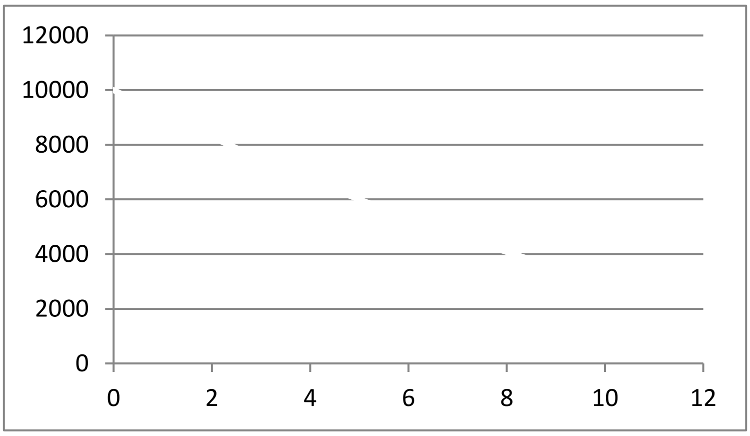
Dada a função $f(x) = x^3 - 9x$, analise o gráfico e responda.

a. Que tipo de função é essa? Quantas raízes ela tem?
b. Encontre as raízes desta função. (Dica isole o x)
c. Qual função indica a inclinação da reta tangente a cada ponto?
d. Qual a inclinação da reta tangente no ponto x = 1? E no ponto x = 2?
e. Nos pontos citados (x=1 e x=2) a função é crescente ou decrescente? Explique.
f. Determine a equação da reta tangente para x = 1. Em seguida para x = 2.
g. O que pode ser feito para determinar os pontos de máximo e de mínimo?
h. Determine as coordenadas dos pontos de máximo e mínimo.

Atividade 2 – Neste caso pense na derivada como a função que dá a taxa de variação instantânea.
Um tanque está sendo esvaziado e o volume em litros de água pode ser calculado em função do tempo t, em horas com a função $V(t) = 20t^2 - 800t + 10.000$, durante as 10 primeiras horas. Determine:

a. O volume inicial do tanque.
b. O volume do tanque após 5 horas.
c. Analise a tabela abaixo, que indica o volume hora a hora, e responda:
   i. Qual função dá o volume em função do tempo?
   ii. Qual a unidade de medida do tempo? E do volume?
   iii. Como fica o gráfico do volume em função ao tempo? (desenhe abaixo)
   iv. O volume é constante?
   v. O que permite medir a variação do volume?

d. Qual função indica a taxa de variação (em L/h)?
e. A vazão inicial.
f. A vazão na quinta hora.
g. Qual o significado de taxa de variação é positiva? E negativa?
h. Existe volume negativo? Existe taxa de variação negativa?



x	v(x)
0	10000
1	9220
2	8480
3	7780
4	7120
5	6500
6	5920
7	5380
8	4880
9	4420
10	4000