Equações diferenciais – aplicações 1

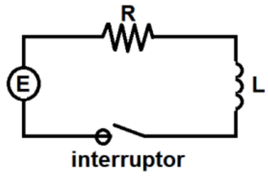
Professor Fiore

As equações diferenciais são ferramentas úteis para resolução de problemas em diversas áreas das ciências pois com elas podemos modelar situações reais, encontrando funções que as descrevem.

As mais simples, decorrem do fato de que, em muitas situações a taxa de crescimento relativa é constante. Sendo assim, há uma constante $k$ dada por $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$, em outras palavras a taxa de variação dividida pela quantidade $y$ é constante, o que implica na equação diferencial $\frac{dy}{dt} = ky$, uma das mais básicas para modelar problemas.

Problemas

1. Considere que a equação diferencial $L\frac{dI}{dt} + RI = E$, modela a intensidade I da corrente de um circuito elétrico, com resistência R = 10 Ω, indutância L = 2 H (Henry = Ω.s) e força eletromotriz de 20 Volts. Determine a I(t) quando I(0)=0.




2. Uma cultura de bactéria cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes no instante t.
a. Qual equação diferencial permite encontrar a função da população em função do tempo?
b. Sabendo que inicialmente há 500 bactérias em uma cultura e após 1 hora há 5000 bactérias, determine a equação para o número de bactéria após t horas. (Use $\ln 10 = 2{,}3$)

3. Uma cultura de bactéria cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes no instante t. Sabendo que inicialmente há 1000 bactérias em uma cultura e após 1 hora há 5000 bactérias, determine a equação para o número de bactéria após t horas. (Use calculadora para calcular logaritmos)

4. Meia vida é o nome que se dá ao intervalo de tempo necessário para que a quantidade de átomos radioativos idênticos se reduza pela metade, em uma reação física ou química. Considerando que certo material sofra decaimento radioativo a uma taxa proporcional á quantidade presente, determine a equação para a massa radioativa remanescente M (em mg) em função do tempo t (em anos) sendo de 100 anos a meia vida do material. (Use $\ln\frac{1}{2} = -0{,}7$ e $M_0$ para massa radioativa inicial. Para achar o valor de k, considere a massa após 100 anos metade da inicial)

5. A lei empírica de resfriamento (e aquecimento) de Newton diz que, a taxa de variação da temperatura de um corpo varia em função da diferença entre a temperatura do corpo (T) e a temperatura do meio ($T_a$), quando essa diferença não é tão grande. Se T for a temperatura do objeto no tempo t e $T_a$ a temperatura ambiente, determine a equação diferencial para o caso. (Considere o significado da equação $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$)

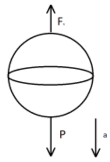
6. Uma garrafa de refrigerante com temperatura 35ºC é colocado em um refrigerador com temperatura de 15ºC. Após 30 minutos a temperatura do refrigerante era 23ºC.
a. Usando a equação diferencial da atividade anterior, encontre a função T(t). (Dica, use $T - T_a = y$ e $\frac{dy}{dt} = ky$)).
b. Qual a temperatura do refrigerante depois de mais meia hora no refrigerador?
c. Quanto tempo levará para a temperatura do refrigerante chegar a 18ºC?

7. Uma xicara de café a temperatura 90ºC foi posta em um ambiente a 24ºC. Quando a temperatura do café for 60ºC a taxa de resfriamento da temperatura é de 1ºC por minuto.

   Use a lei de resfriamento de Newton $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$, e considere $y = T - T_a$ para formar a equação $\frac{dy}{dt} = ky$ a fim de responder as questões abaixo.

a. Encontre a equação y que pode ser usada para encontrar a temperatura.
b. Determine o tempo que levou para o café chegar a 60ºC.
c. Quanto tempo levará para o café atingir 57ºC?

8 Determine a equação diferencial para encontrar funções para velocidade de objetos de massa **m**, influenciados por uma aceleração **g**, num meio externo com coeficiente de atrito **K**.




(Dica: Devido a aceleração da gravidade **g**, o corpo está sujeito a uma força **P = m.g** e a resistência do meio externo, com sentido contrário a P, implica na força de amortecimento viscoso **$F_v$ = K.v** (considerando que o amortecimento viscoso seja o produto entre a velocidade e o coeficiente de atrito). Assim temos **R = P - $F_v$ = mg – Kv**. Pela segunda lei de Newton, **R = m.a**, ou seja **R = m.dv/dt**. Por fim iguale as equações para achar a equação diferencial)

9 Um objeto que pesa 50 kg cai em queda livre num local onde o coeficiente de atrito é de 6 kg/s e a aceleração da gravidade é de 10 m/s². Determine a equação da velocidade do objeto.

10 Um objeto que pesa 60 kg cai em queda livre num local onde o coeficiente de atrito é de 5 kg/s e a aceleração da gravidade é de 10 m/s². Determine a equação da velocidade do objeto.

11. Em sala deduzimos a equação diferencial linear de 1º ordem $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$, para descrever a queda de objetos, sendo $k$ o coeficiente de atrito (em kg/s), $m$ a massa do objeto (em kg), $v$ a função velocidade (em m/s), $t$ o tempo (em s) e $g$ a aceleração da gravidade (em m/s²).

    Considerando o coeficiente de atrito, a massa e a aceleração a gravidade como constantes, determine a equação geral da velocidade.

12. Pesquise mais problemas envolvendo dinâmica populacional, modelos logísticos, disseminação de doenças, sistema predador presa, reações químicas, misturas de soluções, drenagem de tanques, cabos suspensos, etc.