Equações diferenciais lineares de segunda ordem

Professor Fiore

A ordem de uma equação diferencial é dada pela ordem mais alta de suas derivadas, assim equações diferenciais de segunda ordem possuem derivadas máxima de segunda ordem, cuja forma geral é dada por

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = k(x) \qquad \text{ou} \qquad P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = k(x)$$

Onde $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $k(x)$ são funções contínuas.

Quando $k(x) = 0$ a equação é chamada de **homogênea** e um teorema importante diz que, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem soluções da equação linear homogênea a equação abaixo também será solução, sendo c_1 e c_2, constantes quaisquer.

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Quando as equações $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem linearmente independentes e $P(x)$ diferente de zero, a solução acima representa a solução geral.

Em geral não é tão simples encontrar soluções para equações diferenciais de segunda ordem, mas para os casos em que os coeficientes $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ forem constantes, as soluções são bem simples.

Se ela for homogênea, basta construir uma **equação auxiliar**, uma equação de segundo grau com os coeficientes numéricos; resolvê-la e seguir um dos três casos abaixo.

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \rightarrow \qquad am^2 + bm + c = 0$$

Considerando as raízes da equação auxiliar m_1, m_2 e $\Delta = b^2 - 4ac$, há três casos possíveis a considerar.

Caso I: $\Delta > 0$	Caso II: $\Delta = 0$	Caso III: $\Delta < 0$
A equação auxiliar terá duas raízes reais distintas, m_1 e m_2.	A equação auxiliar terá uma raiz real dupla m.	A equação auxiliar terá raízes complexas $m = \alpha \pm \beta i$.
$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$.	$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

Isto é possível pois a função $y = e^{mx}$ tem as derivadas $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2 e^{mx}$, sendo $y = e^{mx}$ uma solução para a equação com coeficientes numéricos. E neste caso

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$
$$(am^2 + bm + c).e^{mx} = 0$$

E como e^{mx} nunca é zero nos restas $am^2 + bm + c = 0$. Assim pode-se montar uma solução resolvendo a equação auxiliar.

Atividades

1. Encontre as soluções gerais das equações diferenciais homogêneas.

a. $y'' - 2y' - 3y = 0$

b. $2y'' - 12y' + 18y = 0$

c. $y'' - 4y' + 13y = 0$

d. $2y'' - 2y = 0$

e. $y'' + 16y = 0$

f. $y'' - 2y' + y = 0$

2. Resolva o problema de valor inicial $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 3$ e $y'(0) = 2$.
3. Se possível, resolva o problema de valor de contorno $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 3$ e $y(1) = 5e^{-2}$
4. Verifique os resultados das questões anteriores encontrando as derivadas e substituindo nas equações.

5. Pesquise em livros a demonstração de que, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem ambas soluções da equação linear homogênea, então $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ também será solução, sendo c_1 e c_2, constantes quaisquer.

Equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes numéricos não homogêneas

Quando a equação não for homogênea, ou seja, $ay'' + by' + cy = k(x)$, a solução geral será dada por

$$y = y_c + y_p$$

Onde y_c é a **solução geral da equação complementar** dada por $am^2 + bm + c = 0$ e y_p é a **solução particular** da equação $ay'' + by' + cy = k(x)$.

A solução particular para as equações não homogêneas pode ser encontrada com o **método dos coeficientes indeterminados**. Para isso basta considerar uma equação genérica semelhante a $k(x)$, encontrar suas derivadas e substituir na equação diferencia a ser solucionada.

Caso I – quando $k(x)$ é um polinômio, y_p será um polinômio de mesmo grau (ou superior).
Caso II – quando $k(x) = Ce^{\alpha x}$, então $y_p = Ae^{\alpha x}$.
Caso III – quando $k(x) = C\sin(\alpha x)$ ou $k(x) = C\cos(\alpha x)$, então $y_p = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$

Em casos em que k(x) for uma combinação dos exemplos acima, podemos gerar y_p por superposição.

Eventualmente o método dos coeficientes indeterminados pode falhar, quando a solução particular for linearmente dependente da solução encontrar com a equação complementar. Nestes casos temos de buscar outra solução particular não linearmente dependente para a solução particular.

Quando houver **valores inicias** $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_1$ ou **valores de contorno** $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_1) = y_1$, basta substitui-los na solução geral para encontrar os valores das constantes c_1 e c_2.

Atividades

6. Resolva as equações diferenciais não homogêneas.

a. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$

b. $y'' - 10y' + 25y = 25x + 90$

c. $y'' - 2y' + 26y = 50e^x$

d. $2y'' + 8y = x^2 + 5x$

e. $y'' - 3y' + 2y = \sin{(3x)}$

f. $y'' - 8y' + 16y = \cos{(x)}$

7. Resolva o problema de valor inicial $2y'' + 4y' + 2y = 4\cos(x)$, $y(0) = 3$ e $y'(0) = 2$.

8. Pesquise no livro do plano de ensino e na apostila, mais atividades.

9. Vamos encontrar a solução da equação $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$ pelo procedimento estudado.
   a. Encontre a solução complementar.
   b. Tente encontrar a solução particular, considerando $y_p = Ae^x$.
   c. Explique o que aconteceu no item anterior.
   d. Em veze de considerar $y_p = Ae^x$, use a equação linearmente independente $y_p = Axe^x$.
   e. Determine a solução geral $y = y_c + y_p$
   f. Agora mostre que o novo resultado está correto.

Gabarito – em fase de testes.... caso encontre divergência, conversar com o professor em sala de aula.

1. Respostas
   a. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$
   b. $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$
   c. $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$
   d. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x}$
   e. $y = c_1\cos 4x + c_2\sin 4x$
   f. $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x}$
2. $y = 3\cos(2x) + \sin(2x)$
3. $y = 3e^{-2x} + 2xe^{-2x}$
4. Ver resolução
5. Ver em livros
6. Gabarito parcial, encontrado no site wolframalpha.com
   a. $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 4$
   b. $y(x) = c_2 e^{5x} x + c_1 e^{5x} + x + 4$
   c. $y(x) = c_1 e^x \sin(5x) + c_2 e^x \cos(5x) + 2e^x$
   d. $y(x) = c_2\sin(2x) + c_1\cos(2x) + \frac{x^2}{8} + \frac{5x}{8} - \frac{1}{16}$
   e. $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \frac{7}{130}\sin(3x) + \frac{9}{130}\cos(3x)$
   f. $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{4x} x - \frac{8\sin(x)}{289} + \frac{15\cos(x)}{289}$
7. $y = 3e^{-x} + 4xe^{-x} + \sin(x)$
8. Ver em livros
9. $y = c_1e^x + c_2e^{4x} - \frac{8xe^x}{3}$

Par encontrar mais soluções, consulte o site wolframalpha.com