Vibrações de molas – movimento harmônico simples

Considere uma mola apoiada em uma superfície sem atrito, com uma massa m presa na ponta e uma força F que causa uma deformação de x unidade. Pela lei de Hooke, que diz que a força deformante é proporcional a deformação elástica produzida, é possível calcular o valor da constante de elástica k.

$$F = kx \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{F}{x}$$

Para manter o sistema em equilíbrio, existe uma força elástica com sentido contrário a força deformadora F, assim

$$F_{elástica} = -kx$$

Pela segunda lei de Newton, $F = m.a$, é possível construir uma equação diferencial de segunda ordem que indica a posição x da massa em função do tempo t, após 'soltar' a massa.

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{e} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \rightarrow \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

1. Uma mola apoiada em uma superfície sem atrito tem uma massa de 5 kg presa a sua ponta e tamanho natural 0,2 metros. Uma força de 18 N é necessária para manter a mola esticada a 0,3 metros. Se a mola for esticada até 0,3 metros em seguida solta, ou seja, a velocidade inicial será zero, qual a função que indica a posição da massa em função do tempo?
2. Considerando conhecimentos de física, estudados em complementos de física, explique o significado da frequência $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e resolva a equação diferencial anterior considerando a frequência $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Vibrações amortecidas

Se além das forças consideradas anteriormente, houver uma força de amortecimento nossa equação diferencial de segunda ordem terá mais um componente. Com base em experimentos, normalmente é considerado que a força de amortecimento é proporcional a velocidade da massa, assim:

$$F_{amortecimento} = -c\frac{dx}{dt} \qquad \text{então} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} \qquad \text{e} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Para esta situação, há três casos a considerar. Há um **superamortecimento** se $c^2 - 4mk > 0$; um **amortecimento crítico** se $c^2 - 4mk = 0$ e uma **subamortecimento** se $c^2 - 4mk < 0$.

3. Considere uma massa $m = 2\ kg$ imersa em um fluido com constante de amortecimento $c = 6$ e presa na ponta de uma mola, sendo que o sistema possui tamanho natural de 0,5 metros. Se uma força de 1,2 N deslocar a mola **para a posição 0,8 metros**, e depois essa mola é solta, determine a equação da posição, após 'soltar' a massa e explique o tipo de movimento.
4. Considere uma massa $m = 1\ kg$ imersa em um fluido com constante de amortecimento $c = 8$ e presa na ponta de uma mola, sendo que o sistema possui tamanho natural de 0,3 metros. Se uma força de 2 N deslocar a mola **0,1 metro, a** levando para a posição 0,4, e depois essa mola é solta, determine a equação da posição, após 'soltar' a massa e explique o tipo de movimento.
5. Considere uma massa $m = 2$ kg imersa em um fluido com constante de amortecimento $c = 12$ e presa na ponta de uma mola, sendo que o sistema possui tamanho natural de 0,6 metros. Se uma força de 3,6 N deslocar a mola **para a posição 0,8 metros**, e depois essa mola é solta, determine a equação da posição, após 'soltar' a massa e explique o tipo de movimento.

6. Circuitos elétricos - Pesquise em livros como usar equações diferenciais de segunda ordem, para resolver problemas envolvendo circuitos elétricos, com resistor, indutor, capacitor e força eletromotriz E; como o da figura ao lado.