Potenciação e função exponencial

Professor Fiore

As potências são úteis para representar quantidades exageradamente grandes ou valores exageradamente pequenos, como o número de átomo do universo estimado em 3×10^{74} ou a massa de um elétron estimado em 9×10^{-31} kg. A potenciação também é entendida como uma operação e aparece em cálculos financeiros, estatísticos entre outros. Conhecer os detalhes sobre potenciação é fundamental para resolver problemas em diversas áreas.

Definição, propriedades e consequências

No ensino fundamental a definição de potência envolve o produto de fatores iguais, onde para um número real a chamado de base e um número natural n, maior que zero chamado de expoente, tem-se a potência p.

$$\underbrace{a.a.a.a\ldots a}_{n\ fatores} = a^n = p \qquad\qquad 2^3 = 2.2.2 = 8$$

Mas no ensino médio e superior, assume-se que tanto a base como o expoente podem ser reais, sendo o único caso que gera problemas 0^0, uma indeterminação. E a partir da definição, surgem algumas propriedades, abaixo há cinco delas e exemplos numéricos que justificam cada uma.

	Propriedade	Exemplo numérico
p1	$a^m.a^n = a^{m+n}$	$2^3.2^5 = (2.2.2).(2.2.2.2.2) = 2^{3+5} = 2^8$
p2	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, para $a \neq 0$	$\frac{2^7}{2^3} = \frac{2.2.2.2.2.2.2}{2.2.2} = 2.2.2.2 = 2^{7-3} = 2^4$
p3	$(a^n)^m = a^{m.n}$	$(2^2)^3 = (2.2).(2.2).(2.2) = 2^{2.3} = 2^6$
p4	$(a.b)^n = a^n.b^n$	$(7.3)^2 = 7.3.7.3 = 7.7.3.3 = 7^2.3^2$
p5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, para $b \neq 0$	$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3}{5}.\frac{3}{5}.\frac{3}{5}.\frac{3}{5} = \frac{3^4}{5^4}$

Com base na propriedade algébrica fundamental $\frac{x.y}{x} = y$, válida para $x \neq 0$, e com uso da propriedade p2 é possível entender como interpretar expoentes negativos. Para isso analise o exemplo numérico.

Usando a propriedade p2

$$\frac{2^2}{2^5} = 2^{2-5} = 2^{-3}$$

Usando a propriedade $\frac{x.y}{x} = y$

$$\frac{2^2}{2^5} = \frac{2.2}{2.2.2.2.2} = \frac{1}{2.2.2} = \frac{1}{2^3}$$

Por transitividade

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

Propriedade - p6

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{para } a \neq 0$$

Usando a propriedade p2 e a propriedade p5 é possível deduzir ainda outra propriedade, válida para $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{1/a^n}{1/b^n} = \frac{1}{a^n}.\frac{b^n}{1} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

portanto

Propriedade – p7

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad \text{para } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0$$

Uma consequência importante também pode ser deduzida a partir da propriedade p2, para isso vamos considerar o que ocorre quando temos expoentes iguais no numerador e no denominador.

Usando a propriedade p2

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Usando $\frac{x}{x} = 1$, com $x \neq 0$

$$\frac{a^n}{a^n} = \frac{a.a.a\ldots..a}{a.a.a\ldots.a} = \frac{1}{1} = 1$$

Por transitividade

$$a^0 = 1$$

Consequência - c1

$$a^0 = 1, \quad \text{para } a \neq 0$$

Outras consequências relevantes

	Consequência da definição	**Explicação**	
c2	$a^1 = a$	Se o expoente for um, podemos suprimi-los	
c3	$1^n = 1$	Um elevado a qualquer valor vale 1	1.1.1.1....1 = 1
c4	$0^n = 0, \quad$ para $n \neq 0$	Zero elevado a qualquer valor diferente de zero, vale 0	0.0.0.0...0 = 0
c5	$0^0 =$ indeterminação	Zero elevado a zero é uma indeterminação	$0^0 = 0^{n-n} = \frac{0^n}{0^n} = \frac{0}{0}$

Uma última propriedade a ser considerada, nos mostra a relação existente entre raízes e potencias com expoentes racionais não inteiros.

Conceito básico - raiz	**Propriedade p1**	**Por transitividade**	**Propriedade p8**
$\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$	$3^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$	$\sqrt{3} = \sqrt[2]{3^1} = 3^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Mais propriedades poderiam ser construídas, mas mais importante que construir fórmulas é entender a construção de cada uma e a aplicabilidade delas na solução de problemas, tanto do cotidiano como do mundo acadêmico.

Exemplo 1 – Uma aplicação simples para potenciação se dá na estimativa de contágio em epidemias. Supondo que o número de pessoas infectadas dobre a cada dia, durante o primeiro mês se nenhuma medida de contenção for tomada, e que inicialmente há 100 pessoas infectadas. Determine a equação de indica o número de infectada em função do dia, dentro do período indicado.
Resolução - Seja N o número de pessoas infectadas e x o número de dias, temos a expressão $N(x) = 100.2^x$, onde $N(x)$ indica o número de infectados em função do número de dias x.

Exemplo 2 – Determine o total de pessoas infectadas após 10 dias.

$$N(10) = 100.2^{10} = 100.1024 = 102\ 400$$

Exemplo 3 – Ao final de qual dia teremos 6400 pessoas infectadas?

$$N(x) = 100.2^x$$
$$6400 = 100.2^x$$
$$64 = 2^x$$
$$2^6 = 2^x \quad \rightarrow \quad x = 6$$

Exemplo 4 – Considerando uma população infinita determine quantas pessoas seriam infectadas após 30 dias. (Use uma calculadora)

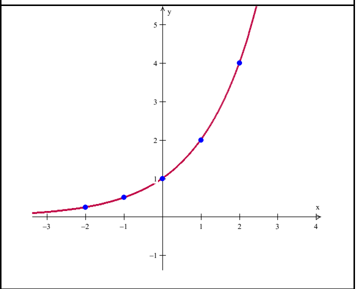
$$N(30) = 100.2^{30} = 100\ .\ 1\ 073\ 741\ 824 = \ 107\ 374\ 182\ 400$$

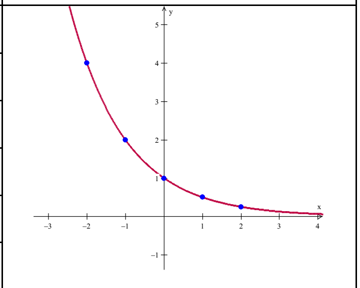
O exemplo 1 mostra o uso de funções exponenciais, quando a variável está no expoente. No exemplo 3 recorremos a uma equação exponencial, quando a incógnita está no expoente. E no exemplo 4 é possível notar o ‘poder’ do crescimento exponencial, que pode extrapolar a realidade em poucos passos.

Para resolver equações exponenciais é útil memorizar algumas potencias, a fim de substituir o valor durante a resolução, como feito no exemplo 3, onde substituímos 64 por 2^6, a fim de descobrir o valor da incógnita x. Nos casos onde não é possível escrever os dois lados da equação como potências de mesma base recorremos aos logaritmos.

Função exponencial

Função exponenciais é dada pela lei $f(x) = a^x$ onde a base $a > 0$ e $a \neq 1$. Quando $a > 0$ a função será crescente e quando $0 < a < 1$ a função será decrescente. Conforme os exemplos a seguir.

<table>
<tr><td colspan="3">$f(x) = 2^x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tabela com valores</td><td>Gráfico</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$f(x)$</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>-2</td><td>¼</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>½</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
</table>

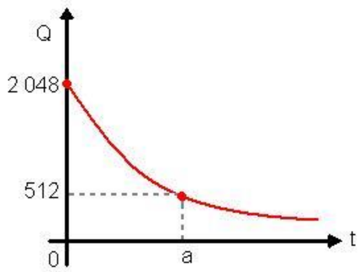
<table>
<tr><td colspan="3">$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tabela com valores</td><td>Gráfico</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$f(x)$</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>-2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>½</td></tr>
<tr><td>2</td><td>¼</td></tr>
</table>

É digno de nota que, as funções exponenciais apresentadas têm domínio $D = R$ e imagem $Im = R_+^*$. Elas são estritamente crescentes ou estritamente decrescentes. E cortam o eixo das ordenadas y, no ponto (0, 1) e ela não corta o eixo das abscissas x.

Um número especial quando se trata de funções exponenciais é o número irracional $e = 2{,}718281828459 \ldots$ dentre muitas propriedades destaca-se que a derivada da função $f(x) = e^x$ é dada por $f'(x) = e^x$.

As funções exponenciais são úteis para descrever inúmeros situações, conforme exemplos abaixo.

Exemplo 5 - (Vunesp-SP) Uma substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = K.2^{-0,5t}$, onde K é uma constante, t indica o tempo (em minutos) e Q(t) indica a quantidade de substância (em gramas) no instante t. Considerando-se os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de K e a.



Observando o gráfico temos os pontos (0, 2048) e (a, 512). Substituindo o primeiro na função dada temos:

$$Q(t) = K.2^{-0,5t}$$

$$2\,048 = K.2^{-0,5.0}$$

$$2\,048 = K$$

Para encontrar o valor de a, basta substituir as coordenadas (a, 512) na equação, lembrando que $2\,048 = K$.

$$512 = 2\,048.2^{-0,5a}$$

$$\frac{512}{2\,048} = 2^{-0,5a}$$

$$\frac{1}{4} = 2^{-0,5a}$$

$$2^{-2} = 2^{-0,5a} \quad \rightarrow \quad -2 = -0{,}5a \quad \rightarrow \quad a = 4$$

Exemplo 6 - (Mogi-SP - Adaptada) O número *N* de decibéis e a potência *I* de um som medido em watts por centímetro quadrado estão relacionados pela fórmula:

$$I = 10^{-16}.10^{\left(\frac{N}{10}\right)}$$

Determine o número de decibéis correspondente ao som provocado por tráfego pesado de veículos, cuja potência é estimada em 10^{-8} Watts por centímetro quadrado.

Resolução possível:

$$I = 10^{-16}.10^{\left(\frac{N}{10}\right)}$$

$$10^{-8} = 10^{-16}.10^{\left(\frac{N}{10}\right)}$$

$$\frac{10^{-8}}{10^{-16}} = 10^{\left(\frac{N}{10}\right)}$$

$$10^{8} = 10^{\left(\frac{N}{10}\right)} \quad \rightarrow \quad 8 = \frac{N}{10} \quad \rightarrow \quad N = 80$$

Exemplo 7 - (UFPR - Adaptada) Em estudos realizados numa área de proteção ambiental, biólogos constataram que o número N de indivíduos de certa espécie primata está crescendo em função do tempo t (dado em anos), segundo a expressão:

$$N(t) = \frac{800}{5 + 3 \times 2^{-0,1t}}$$

Supondo que o instante t = 0 corresponda ao início desse estudo e que essa expressão continue sendo válida com o passar dos anos, determine:

a. O número inicial de primaras.

$$N(0) = \frac{800}{5 + 3 \times 2^{-0,1.0}} = \frac{800}{5 + 3 \times 1} = \frac{800}{8} = 100$$

b. O número de primatas após 10 anos do início.

$$N(10) = \frac{800}{5 + 3 \times 2^{-0,1.10}} = \frac{800}{5 + 3 \times 2^{-1}} = \frac{800}{5 + 3 \times \frac{1}{2}} = \frac{800}{13/2} = \frac{800}{1}.\frac{2}{13} \approx 123$$

c. O número de primatas após muito, muito anos ($t \rightarrow \infty$)

$$N(t \rightarrow \infty) = \frac{800}{5 + 3 \times 2^{-0,1.t}} = \frac{800}{5 + 3 \times 0} = \frac{800}{5} = 160$$

Neste último exemplo é interessante analisar o efeito de $t \rightarrow \infty$ em $3 \times 2^{-0,1.t}$, note que um valor muito grande no expoente fará $3 \times 2^{-0,1.t}$ tender a zero, ou seja a longo prazo o valor de $3 \times 2^{-0,1.t}$ será tão perto de zero que para $t \rightarrow \infty$ dizemos que $3 \times 2^{-0,1.t} = 0$. O efeito disso é interessante, pois nos mostra que a população de primatas não irá ultrapassar 160. O gráfico indica uma fundação estritamente crescente com assíntota horizontal N = 160.